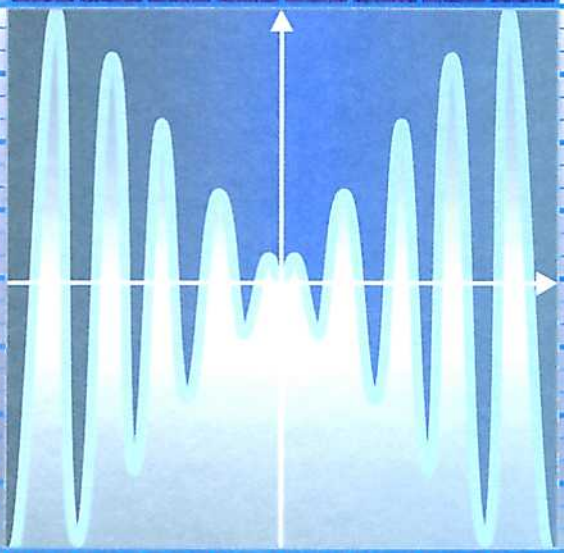
МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра и начала математического анализа

11



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра и начала математического анализа

11 КЛАСС

УЧЕБНИК ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Базовый и профильный уровни

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

8-е издание

Москва
«Просвещение»
2009

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/15 от 31.10.07)
и Российской академии образования (№ 01–208/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения:

— начало материала, необязательного для базового уровня

— окончание материала, необязательного для базового уровня

1.7* — пункт для профильного уровня

— факты, свойства, определения, формулы, которые нужно помнить

1.2 — задания для базового уровня

2.5 — задания для профильного уровня

4.9° — задания для устной работы

5.4* — задания повышенной трудности

111 — задания для повторения

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс :
А45 учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 8-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 464 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-021970-9.

Дополненное издание соответствует федеральным компонентам Государственного стандарта общего образования по математике и содержит материал как для базового, так и для профильного уровня. По нему можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы.

Учебник нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 978-5-09-021970-9

© Издательство «Просвещение», 2002
© Издательство «Просвещение», 2008, с изменениями
© Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2008
Все права защищены

Глава I

Функции. Производные. Интегралы

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

§ 1. Функции и их графики

1.1. Элементарные функции

Напомним определение функции. Пусть каждому числу x из множества чисел X в силу некоторого (вполне определенного) закона поставлено в соответствие единственное число y. Тогда говорят, что y есть функция от x, определенная на множестве X; при этом x называют независимой переменной или **аргументом**, а y — зависимой переменной или **функцией** от x, множество X — **областью определения функции**.

Таким образом, чтобы задать функцию, нужно указать способ (закон, правило), с помощью которого для каждого значения аргумента $x \in X$ можно найти соответствующее значение y. Обычно этот закон обозначают одной буквой, например f, и тогда пишут

$$y = f(x),\ x \in X. \qquad (1)$$

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что y зависит от x, вместо y пишут $y(x)$, а для сокращения записи (1) пишут $y = f(x)$ или $f(x)$.

Закон f также называют функцией f и говорят: задана функция f на множестве чисел X или, коротко, задана функция f.

Отметим, что вместо пары букв x и y в определении функции могут участвовать любые другие пары букв. Например, функцию f, определенную на множестве чисел X, можно записать как в виде (1), так и в виде $u = f(v)$, $v \in X$, или даже в виде $x = f(y)$, $y \in X$. Все эти записи характеризуют одну и ту же функцию f.

Число, соответствующее $x_0 \in X$ для данной функции $y(x)$, называют значением функции в точке x_0 и обозначают $y(x_0)$. Если функция записана в виде (1), то это число обозначают $f(x_0)$.

Пусть функция $y = F(u)$ определена на множестве G, а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X и множество всех ее значений содержится в множестве G. Тогда любому $x \in X$ функция φ ставит

в соответствие число $u \in G$, а этому числу u функция F ставит в соответствие число y, т. е. y является функцией от x на множестве X.

Другими словами, получена функция $y = F(\varphi(x))$, определенная на множестве X. Эту функцию называют функцией от функции или **сложной функцией**. Сложную функцию называют также **суперпозицией двух функций** φ и F.

Например, если $y = 2^u$ и $u = x^3$, то для любого действительного x определена сложная функция $y = 2^{x^3}$.

Можно указать сложную функцию, в образовании которой участвует более двух функций. Сложными будут, например, функции $y = e^{4x} + x^2$, $y = \cos(2x + 3^x)$, $y = (x - 1)^3 + \operatorname{tg} x$, $y = \log_2(3x + 4)$, $y = \log_3(\sin x + 2)$, $y = \sin(3 + \log_2 x)$.

Ранее уже изучались функции

$$y = x^n \ (n \in \boldsymbol{N}),\ y = x^{-n} \ (n \in \boldsymbol{N}),\ y = \sqrt[n]{x},\ (n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 2),$$
$$y = x^\alpha \ (\alpha \in \boldsymbol{R}_+),\ y = x^{-\alpha} \ (\alpha \in \boldsymbol{R}_+),$$
$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1),\ y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Все эти функции называют **основными элементарными функциями**.

Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и применения конечного числа суперпозиций, принято называть **элементарными функциями**. Элементарными функциями, например, являются функции $y = \sin x + \cos x$, $y = -\sin^2(x - 5)$.

1.1° а) Сформулируйте определение функции.
б) Какую функцию называют сложной?
в) Перечислите основные элементарные функции.
г) Какие функции называют элементарными?

1.2 Выпишите основные элементарные функции $f(x)$ и $g(x)$, с помощью которых задана сложная функция:
а) $f(g(x)) = \sqrt{\lg x}$; б) $f(g(x)) = \ln x^4$.

1.3 Выпишите основные элементарные функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$, с помощью которых задана сложная функция:
а) $f(g(\varphi(x))) = \sin\sqrt{x^3}$; б) $f(g(\varphi(x))) = (\sqrt{\sin x})^3$.

1.4 Даны элементарные функции: $f(x) = 7^x$, $\varphi(x) = x^2$, $g(x) = \log_5 x$. Запишите сложную функцию:
а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(g(x))$; в) $f(g(x))$; г) $g(g(x))$;
д) $g(\varphi(f(x)))$; е) $\varphi(g(f(x)))$; ж) $f(g(\varphi(x)))$; з) $f(g(f(x)))$.

1.2. Область определения и область изменения функции. Ограниченность функции

Из определения функции следует, что функция $y = f(x)$ должна задаваться вместе с ее областью определения, которая дальше будет обозначаться X или $D(f)$. При этом подчеркнем, что область определения функции может задаваться либо условиями решаемой задачи, либо физическим смыслом изучаемого явления, либо математическими соглашениями.

Однако часто, задавая функцию аналитически, т. е. формулой, не указывают явно ее область определения. В таких случаях принято рассматривать функцию на ее полной области определения.

Полной областью определения функции $y = f(x)$, заданной аналитически, называют множество всех действительных значений независимой переменной x, для каждого из которых функция принимает действительные значения. Иногда полную область определения называют **областью существования функции.**

В тех случаях, когда функция задана формулой и не указана ее область определения, областью определения функции считают область ее существования.

Областью изменения (областью значений) функции $f(x)$ называют множество всех чисел $f(x)$, соответствующих каждому x из области определения функции; область изменения функции $f(x)$ обозначают $E(f)$ или Y.

ПРИМЕР 1. Пусть дана функция $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$. Так как $\log_2 \sin x \geqslant 0$ лишь при условии $\sin x = 1$ (в этом случае $\log_2 \sin x = 0$), то область определения (существования) данной функции — множество всех чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $X = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \right\}$. Область изменения функции состоит из одного числа нуль, т. е. $Y = \{0\}$.

ПРИМЕР 2. Пусть дана функция $y = \sqrt{1 - x^2}$. Область определения (существования) этой функции — отрезок $X = [-1; 1]$ — находится из условия $1 - x^2 \geqslant 0$. Область изменения — отрезок $Y = [0; 1]$ — находится следующим образом: так как $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$, значит, $0 \leqslant \sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$. При этом y принимает все значения из промежутка $[0; 1]$.

ПРИМЕР 3. Пусть дана функция $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Область определения (существования) этой функции — интервал $X = (-1; 1)$ — находится из условия $1 - x^2 > 0$. Область изменения функции — проме-

жуток $Y = [1; +\infty)$ — находится так: если $-1 < x < 1$, то $0 < \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, поэтому $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 1$. При этом y принимает все значения из промежутка $[1; +\infty)$.

ПРИМЕР 4. Пусть дана функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ с областью определения $X = \left[0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Ее область изменения есть отрезок $Y = [1; 2]$.

Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной снизу** на множестве X, если существует число A, такое, что $A \leqslant f(x)$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = x^2$ ограничена снизу на всей области существования $\boldsymbol{R}$, так как $x^2 \geqslant 0$ для любого действительного x.

Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной сверху** на множестве X, если существует число B, такое, что $f(x) \leqslant B$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sqrt{1-x^2}$ ограничена сверху на всей области существования $[-1; 1]$, так как $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ для любого $x \in [-1; 1]$.

Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной** на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей области существования $\boldsymbol{R}$, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого действительного x.

Про функцию $y = f(x)$ говорят, что она принимает на множестве X **наименьшее значение** в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in X$.

Говорят также, что функция $y = f(x)$ принимает на множестве X **наибольшее значение** в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \geqslant f(x)$ для всех $x \in X$.

ПРИМЕР 5. Функция $y = \sqrt{1-x^2}$ на промежутке $[-1; 1]$ принимает наибольшее значение $y = 1$ при $x = 0$ и наименьшее значение $y = 0$ при $x = -1$ и при $x = 1$.

ПРИМЕР 6. Функция $y = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$, не принимает наибольшего значения и не ограничена сверху.

ПРИМЕР 7. Функция $y = 2^x$ на множестве $(-\infty; 0]$ принимает наибольшее значение $y = 1$ при $x = 0$, не принимает наименьшего значения, но ограничена снизу числом 0.

ПРИМЕР 8. Функция $y = \log_2 x$ на множестве $(0; +\infty)$ не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

ПРИМЕР 9. Функция $y = [x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

ПРИМЕР 10. Функция $y = \{x\}$ — дробная часть числа x ($\{x\} = x - [x]$) принимает наименьшее значение $y = 0$ при любом $x \in \boldsymbol{Z}$, не принимает наибольшего значения, но ограничена сверху числом 1. ●

1.5° Что такое: а) область существования функции; б) область определения функции; в) область изменения функции?

1.6° Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. В каком случае говорят, что на этом множестве она ограничена сверху; ограничена снизу; ограничена? Приведите примеры.

1.7 Докажите, что функция $y = 1 - x$ ограничена на множестве $X = [-1; 1]$.

Найдите область определения функции:

1.8 а) $y = \sqrt{x-1}$; б) $y = \sqrt[3]{x+1}$; в) $y = \sqrt{x^2-1}$;
г) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$; д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}$; е) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+4}$.

1.9 а) $y = \log_2 |x|$; б) $y = |\log_2 x|$; в) $y = \log_2 \operatorname{tg} x$;
г) $y = 2^{\sqrt{x}}$; д) $y = \sqrt{2^x}$; е) $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$.

1.10 Найдите область изменения функции:

а) $y = \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{1-x^2}$, $X = \left[0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

в) $y = \sqrt{1-x^2}$, $X = \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$; г) $y = \dfrac{30}{\sqrt{100-x^2}}$, $X = [-8; 1]$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $X = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; е) $y = \log_2 \sqrt{x^2-1}$;

ж) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $X = \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$; з) $y = \log_2 \sqrt{1-x^2}$.

1.11* Какая из функций в предыдущем задании на области ее определения является: а) ограниченной снизу; б) ограниченной сверху; в) ограниченной?

1.12 Покажите, что на полной области определения функция:

а) $y = x^2$ не является ограниченной сверху;

б) $y = -\frac{1}{x^2}$ не является ограниченной снизу;

в) $y = \log_2 x$ не является ограниченной.

1.13 Докажите, что если функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, ограничена и сверху, и снизу на этом множестве, то она ограничена на этом множестве.

1.14 Имеет ли наибольшее (наименьшее) значение функция:

а) $y = \sqrt{x-1}$; б) $y = \sqrt{x^2-1}$; в) $y = x^3$;

г) $y = 2^{\sqrt{\sin x}}$; д) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $y = \sqrt[3]{\sin x}$?

Если имеет, то укажите точку (точки), в которой оно достигается.

1.3. Четность, нечетность, периодичность функций

Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **четной**, если для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$ и справедливо равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Приведем примеры четных функций:

$$y = \cos x,\ y = x^2,\ y = \sqrt{1-x^2},\ y = \frac{1}{1+x^2}.$$

График любой четной функции $y = f(x)$ с областью определения X симметричен относительно оси ординат, так как для любого $x \in X$ точки плоскости $(x; f(x))$ и $(-x; f(x))$ симметричны относительно оси Oy.

Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **нечетной**, если для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$ и справедливо равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Приведем примеры нечетных функций:

$$y = x,\ y = \sin x,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x},\ y = \operatorname{tg} x.$$

График любой нечетной функции $y = f(x)$ с областью определения X симметричен относительно начала координат, так как для любого $x \in X$ точки плоскости $(x; f(x))$ и $(-x; -f(x))$ симметричны относительно начала координат.

Наряду с четными и нечетными функциями есть функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными.

Например, функции $y = 2x + 3$, $y = x^2 + 2x + 3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \lg x$, $y = 2^x$ не являются ни четными, ни нечетными.

Кроме того, есть функции, которые являются одновременно и четными, и нечетными. Например, функция $f(x) = 0$ является и четной, и нечетной, так как для любого действительного числа x справедливы равенства:

$$f(-x) = 0 = f(x) \text{ и } f(-x) = 0 = -0 = -f(x).$$

Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **периодической**, если существует число $T \neq 0$, такое, что для любого $x \in X$ число $(x + T) \in X$, число $(x - T) \in X$ и справедливо равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T называют **периодом функции** $f(x)$.

Заметим, что для периодической функции имеет место равенство

$$f(x - T) = f(x).$$

Действительно, функция $y = f(x)$ определена в точке $x - T$ и справедливо равенство $f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T)$.

Если функция f, рассматриваемая на множестве X, принимает действительные значения и имеет период $T \neq 0$, то очевидно, что она имеет также период $-T$, поэтому достаточно рассматривать положительные периоды.

ПРИМЕР 1. а) Функция $y = \sin x$ определена на множестве $X = (-\infty; +\infty)$ и имеет периодом число $T = 2\pi$, так как для любого $x \in X$ числа $x + 2\pi$ и $x - 2\pi$ принадлежат множеству X и $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

б) Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена на множестве X всех x, кроме чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и имеет периодом число $T = \pi$, так как для любого $x \in X$ числа $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат множеству X и $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

в) Функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x) имеет период $T = 1$, так как она определена для любых $x \in \boldsymbol{R}$ и $\{x + 1\} = \{x\}$.

г) Функция $y = \sin\sqrt{x}$ не является периодической, так как ее область определения $X = [0; +\infty)$ и, например, для числа $x = 0$ число $x - T$ (если $T > 0$) не принадлежит X — области определения этой функции.

д) Функция $y = C$ (константа) имеет периодом любое число $T \neq 0$.

Число T называют **главным периодом функции**, если оно является наименьшим среди всех ее положительных периодов.

ПРИМЕР 2.

а) Функция $y = \sin x$ имеет главный период $T = 2\pi$.

б) Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет главный период $T = \pi$.

в) Функция $y = \{x\}$ имеет главный период $T = 1$.

г) Функция Дирихле, определенная следующим образом:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — любое рациональное число} \\ 0, & \text{если } x \text{ — любое иррациональное число,} \end{cases}$$

имеет периодом любое рациональное число $T \neq 0$. Она не имеет главного периода.

д) Функция $y = C$ (см. пример 1д)) не имеет главного периода.

Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения X. Пусть дано число α, такое, что $\alpha \neq 0$. Тогда функция $y = f(\alpha x)$ имеет область определения X_1, которая характеризуется свойством: для любого $x \in X_1$ число $\alpha x \in X$, а для любого $x \in X$ число $\frac{x}{\alpha} \in X_1$. При этом если функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $y = f(\alpha x)$ имеет период $\frac{T}{\alpha}$. Действительно, для любого $x \in X_1$ справедливо равенство

$$f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x),$$

откуда следует, что число $\frac{T}{\alpha}$ есть период функции $y = f(\alpha x)$, а значит, и число $\left|\frac{T}{\alpha}\right|$ есть период функции $y = f(\alpha x)$.

ПРИМЕР 3.

а) Функция $y = \sin x$ имеет область определения $X = (-\infty; +\infty)$ и период 2π. Для любого числа α ($\alpha \neq 0$) функция $y = \sin \alpha x$ имеет область определения $X_1 = X = (-\infty; +\infty)$ и период $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.

б) Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет область определения X (X — это все $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$) и период π. Для любого числа α ($\alpha \neq 0$) функция $y = \operatorname{tg} \alpha x$ имеет область определения X_1 (X_1 — это все x, кроме $x_n = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} n$, $n \in \boldsymbol{Z}$) и период $\frac{\pi}{|\alpha|}$.

Сумма, разность, произведение и частное двух функций, каждая из которых имеет область определения X и период T, также есть функция с областью определения X и с периодом T. (Предполагается, что функция-делитель отлична от нуля на множестве X.)

Поэтому, например, функция $y = \sin x + \sin 2x - \sin 3x$, определенная на множестве $(-\infty; +\infty)$, имеет период 2π, так как каждое слагаемое имеет область определения $(-\infty; +\infty)$ и период 2π.

Функция $y = \sin x + \operatorname{tg} x$, определенная на множестве X всех x, кроме чисел $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, имеет период $T = 2\pi$, так как каждое слагаемое имеет область определения X и период 2π.

Однако нельзя утверждать, что если каждая из двух функций имеет главный период T, то их сумма, разность, произведение и частное имеют всегда главный период T.

Например, каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеет главный период 2π, но их произведение, т. е. функция $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, имеет главный период π, а их сумма, т. е. функция $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, имеет главный период 2π. ●

1.15° а) Какую функцию называют: четной; нечетной?

1.16 Докажите четность функции:
а) $y = x^4 - 5x^2 + 8\cos x$; б) $y = 7x^6 + 6x^4 - 5$.

1.17 Докажите нечетность функции:
а) $y = x^5 - 5x - 4\sin x$; б) $y = 4x^7 - 5x^3 - 5x$.

Определите, является ли четной или нечетной функция **(1.18—1.20)**:

1.18 а) $y = \dfrac{x^4 + 4}{2x^3}$; б) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 8}$;

в) $y = \dfrac{x^4 - \cos x}{5x^3 - 3x}$; г) $y = \dfrac{5x^3 + \sin x}{3x^5 - x}$.

1.19 а) $y = |x - 4| + |x + 4|$;
б) $y = |x - 8| + |x + 8|$;
в) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$;
г) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
д) $y = \sqrt{(x - 3)(x + 2)} + \sqrt{(x + 3)(x - 2)}$;
е) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 7)} + \sqrt{(x + 1)(x + 7)}$.

1.20 а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 3x + 8} + \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 3x + 8}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - 7x + 1} - \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 7x + 1}$.

1.21 На рисунке 1, *а—г* изображена часть графика функции $y = f(x)$. Постройте весь график, если известно, что эта функция четная.

1.22 Решите задачу 1.21, если функция $y = f(x)$ нечетная.

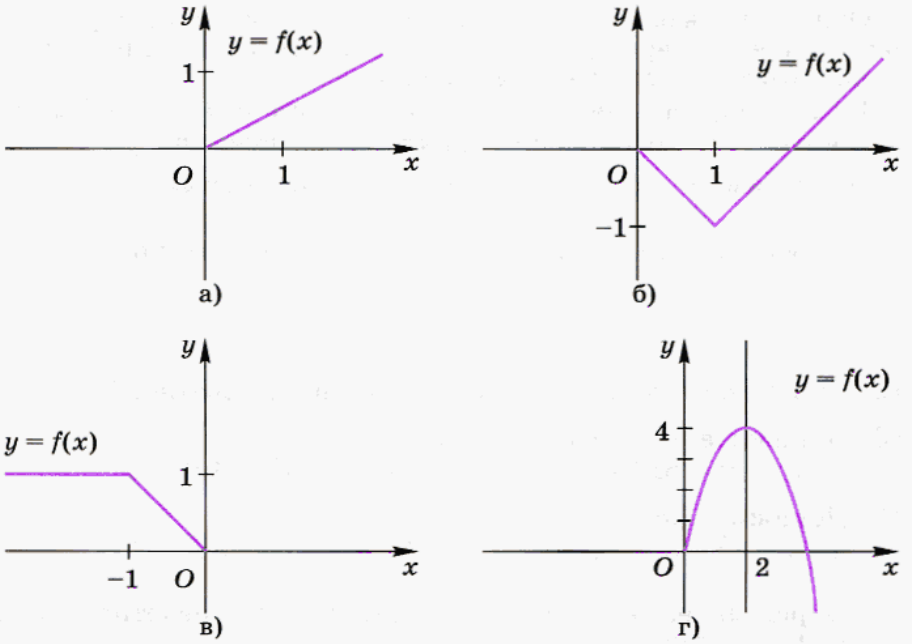


Рис. 1

1.23 Докажите, что если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$, то функция:

а) $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ четная;

б) $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ нечетная.

1.24 Докажите, что если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$, то эту функцию можно представить в виде суммы двух функций, каждая из которых определена на том же множестве X и одна из которых четная, а другая нечетная.

1.25 Представьте функцию $y = 2^x$, определенную на всей числовой оси, в виде суммы четной и нечетной функций.

1.26 Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух четных функций есть четная функция на общей части (пересечении) областей определения этих функций.

1.27 а) Выясните, четной или нечетной функцией является сумма, разность, произведение и частное двух нечетных функций на общей части (пересечении) областей определения этих функций.

б) Выясните, является ли четной или нечетной функцией сумма, разность, произведение и частное четной и нечетной функций на общей части (пересечении) областей определения этих функций.

1.28° а) Какую функцию называют периодической?
б) Какое число называют главным периодом периодической функции?
в) Всякая ли периодическая функция имеет главный период?

1.29 Приведите пример периодической функции:
а) имеющей главный период π; 2π; 1;
б) не имеющей главного периода.

1.30 Докажите, что если число T есть период функции f, то число mT, где $m \in N$, также будет периодом этой функции.

1.31 На рисунке 2, *а*—*г* изображена часть графика функции $y = f(x)$. Продолжите построение графика функции, если известно, что период данной функции $T = 2$.

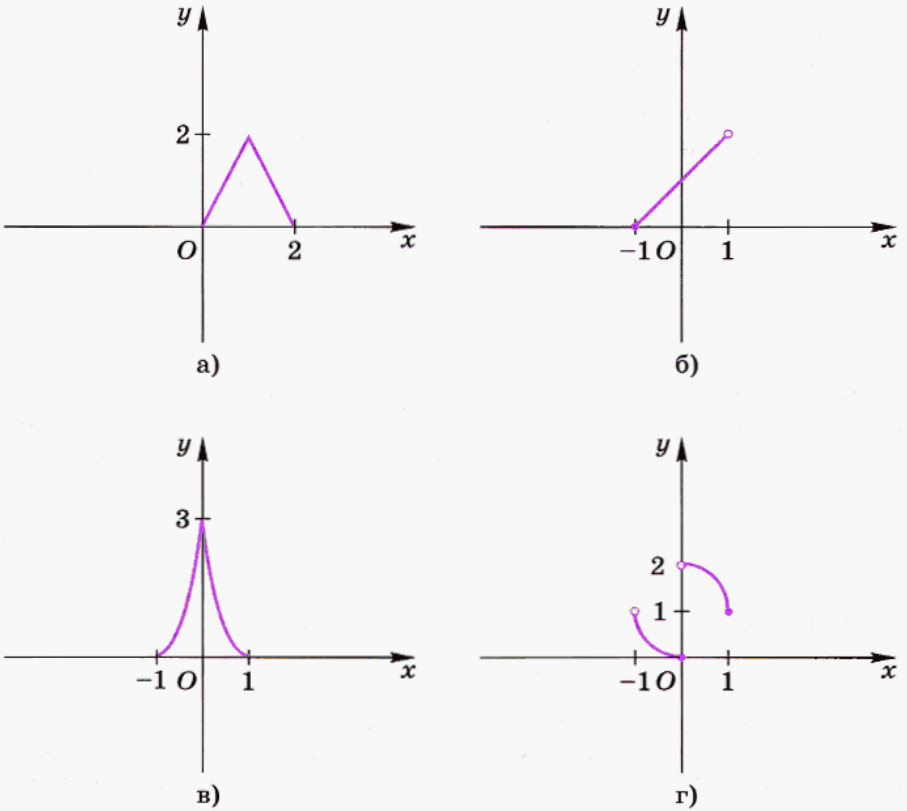


Рис. 2

Определите, является ли функция периодической. Если да, то укажите ее период **(1.32—1.35)**:

1.32 а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \cos^2 x$; в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$;
г) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; д) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$; е) $y = \sin\sqrt{x}$;
ж) $y = \cos\sqrt{-x}$; з) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; и) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{-x}$.

1.33 а) $y = |\sin x|$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = |\operatorname{tg} x|$;
г) $y = |\operatorname{ctg} x|$; д) $y = \sin|x|$; е) $y = \cos|x|$;
ж) $y = \operatorname{tg}|x|$; з) $y = \operatorname{ctg}|x|$.

1.34 а) $y = [x]$; б) $y = \{x\}$; в) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$;
г) $y = \left|\left\{\frac{1}{2}x\right\} - \frac{1}{2}\right|$; д) $y = \left|2\left\{\frac{1}{2}x\right\} - 1\right|$; е) $y = \left|4\left\{\frac{1}{4}x\right\} - 2\right|$.

1.35 а) $y = [\sin x]$; б) $y = \{\sin x\}$; в) $y = [\cos x]$;
г) $y = \{\cos x\}$; д) $y = |[\sin x]|$; е) $y = |\{\sin x\}|$;
ж) $y = |[\cos x]|$; з) $y = |\{\cos x\}|$.

1.36 Определите период функции:
а) $y = \sin 3x + \cos 8x$; б) $y = \sin 7x \cos 5x + \sin 5x \cos 7x$;
в) $y = \sin 4x + \cos 10x$; г) $y = \sin 7x \cos 5x - \sin 5x \cos 7x$.

1.4. Промежутки возрастания, убывания, знакопостоянства и нули функций

Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **возрастающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$

ПРИМЕР 1.
а) Функция $y = x$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
б) Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
в) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **убывающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

ПРИМЕР 2.

а) Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

б) Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

в) Функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Возрастающие функции и убывающие функции называют **строго монотонными функциями**.

Сумма возрастающих на промежутке X функций, очевидно, является функцией, также возрастающей на X, а сумма убывающих на промежутке X функций является функцией, убывающей на X.

ПРИМЕР 3.

а) Функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[8]{x}$ — возрастающие на полуинтервале $[0; +\infty)$. Функция $y = \sqrt{x} + \sqrt[8]{x}$ также возрастающая на этом полуинтервале.

б) Функции $y = \log_2 x$ и $y = 2^x$ — возрастающие на интервале $(0; +\infty)$. Функция $y = \log_2 x + 2^x$ также возрастающая на этом интервале.

в) Функции $y = -x$ и $y = \sqrt{-x}$ — убывающие на полуинтервале $(-\infty; 0]$. Функция $y = -x + \sqrt{-x}$ также убывающая на этом полуинтервале.

г) Функции $y = \log_{0,5} x$ и $y = 0{,}5^x$ — убывающие на интервале $(0; +\infty)$. Функция $y = \log_{0,5} x + 0{,}5^x$ также убывающая на этом интервале.

Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **неубывающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

ПРИМЕР 4.

а) Функция $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ является неубывающей на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

б) Функция $y = \sqrt{x + |x|}$ является неубывающей на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **невозрастающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

ПРИМЕР 5.

а) Функция $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$ является невозрастающей на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

б) Функция $y = \sqrt{|x| - x}$ является невозрастающей на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Возрастающие функции, а также убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называют **монотонными функциями.**

Число x_0, принадлежащее области существования функции $y = f(x)$, называют **нулем** этой функции, если $f(x_0) = 0$. Для того чтобы найти все нули функции $y = f(x)$, надо найти все корни уравнения $f(x) = 0$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет знак «+», если в этой точке $f(x) > 0$, и знак «−», если в этой точке $f(x) < 0$.

Если для всех x из промежутка, принадлежащего области определения функции $y = f(x)$, соответствующие значения этой функции имеют один и тот же знак, то этот промежуток называют **промежутком знакопостоянства** этой функции.

Промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$ — это, во-первых, промежутки, на которых

$$f(x) > 0, \qquad (1)$$

а во-вторых, промежутки, на которых

$$f(x) < 0. \qquad (2)$$

Поэтому для того, чтобы найти все промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$, надо найти все решения неравенств (1) и (2).

Если найдены все промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$, то говорят, что определено распределение знаков этой функции.

Далее на рисунках цветными сплошными точками изображены нули функции, а кружками («выколотыми» точками) — точки, в которых функция не определена.

ПРИМЕР 6.

а) Функция $y = e^x$ определена и положительна на промежутке $(-\infty; +\infty)$, т. е. она имеет знак «+» в каждой точке этого промежутка. Нулей у этой функции нет.

б) Функция $y = \ln x$ определена на промежутке $(0; +\infty)$, имеет единственный нуль $(x_0 = 1)$, распределение знаков этой функции изображено на рисунке 3.

в) Функция $y = \sqrt{x}$ определена на промежутке $[0; +\infty)$, имеет единственный нуль $(x_0 = 0)$, имеет знак «+» в каждой точке промежутка $(0; +\infty)$.

г) Функция $y = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$ определена на объединении промежутков $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$, имеет два нуля $(x_1 = -1$ и $x_2 = 3)$. Распределение знаков этой функции изображено на рисунке 4.

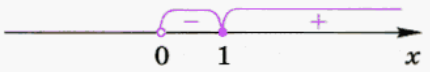


Рис. 3

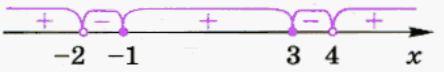


Рис. 4

д) Функция $y = \dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-5)}{x-3}$ определена на объединении промежутков $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, имеет три нуля ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 5$). Распределение знаков этой функции изображено на рисунке 5.

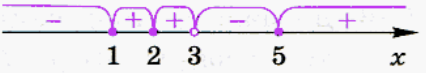


Рис. 5

1.37° Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. В каком случае ее называют: возрастающей, убывающей, строго монотонной на промежутке X?

1.38* Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. В каком случае ее называют: неубывающей, невозрастающей, монотонной на промежутке X?

1.39 а) Докажите, что сумма возрастающих на промежутке X функций является функцией, также возрастающей на X.
б) Докажите, что сумма убывающих на промежутке X функций является функцией, также убывающей на X.

1.40* а) Докажите, что если функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и возрастает на нем, то для любой пары чисел x_1 и x_2 из промежутка X из справедливости неравенства $f(x_1) > f(x_2)$ следует справедливость неравенства $x_1 > x_2$.

б) Докажите, что если функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и убывает на нем, то для любой пары чисел x_1 и x_2 из промежутка X из справедливости неравенства $f(x_1) > f(x_2)$ следует справедливость неравенства $x_1 < x_2$.

в) Докажите, что если функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна на промежутке X, то для любой пары чисел x_1 и x_2 из X из справедливости равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует справедливость равенства $x_1 = x_2$.

1.41 Докажите, что функция $y = |x|$ на промежутке:
а) $[0; +\infty)$ возрастает; б) $(-\infty; 0]$ убывает.

1.42 Докажите, что функция $y = x^2 - 2x$ на промежутке:
а) $[1; +\infty)$ возрастает; б) $(-\infty; 1]$ убывает.

1.43 Докажите, что функция $y = -x^2 + 4x$ на промежутке:
а) $[2; +\infty)$ убывает; б) $(-\infty; 2]$ возрастает.

1.44 При каких значениях k функция $y = kx + b$ является:
а) возрастающей; б) убывающей?

1.45 При каких значениях a функция $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ является:
а) возрастающей на промежутке $[x_0; +\infty)$;
б) убывающей на промежутке $[x_0; +\infty)$;
в) возрастающей на промежутке $(-\infty; x_0]$;
г) убывающей на промежутке $(-\infty; x_0]$?

1.46 Докажите, что функция:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y = \pi^x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^{-\frac{\pi}{2}}$

строго монотонна на полной области определения.

1.47 Укажите промежутки строгой монотонности функции:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}$; в) $y = \sqrt{5 - 4x}$;

г) $y = \lg \cos x$; д) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$; е) $y = \dfrac{-3}{x - 2} + 1$;

ж) $y = |x^2 - 3x + 2|$; з) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

1.48 Укажите промежутки монотонности функции:

а) $y = x - [x]$; б) $y = [x] + x$;

в) $y = |x - 4| + |x + 4|$; г) $y = |x - 8| - |x + 8|$;

д) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$;

е) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

1.49 Укажите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 - 4$; б) $y = x^2 - 4x$; в) $y = x^2 - 5x + 4$;

г) $y = 9 - x^2$; д) $y = -x^2 + 2x$; е) $y = -2x^2 - 3x + 5$;

ж) $y = \dfrac{4}{x + 3} + 1$; з) $y = \dfrac{-2}{x - 2} - 1$; и) $y = -|x - 2| + 2$.

1.50 Функция $y = \operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум икс» — знак числа x) определяется так: если $x > 0$, то $y = 1$; если $x = 0$, то $y = 0$; если $x < 0$, то $y = -1$. Определите промежутки монотонности, промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = \operatorname{sgn} x$; б) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$;

в) $y = \operatorname{sgn}(\lg x)$; г) $y = \operatorname{sgn} \dfrac{1}{x}$.

1.51 При каких значениях b и c функция $y = x^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения только при $x \in (-4; -2)$?

1.5. Исследование функций и построение их графиков элементарными методами

Если для данной функции $y = f(x)$ изучены перечисленные в пп. 1.2—1.4 свойства, то говорят, что проведено **исследование функции** $y = f(x)$.

Таким образом, при исследовании функции необходимо ответить на следующие вопросы:

1) Какова область определения функции?
2) Какова область изменения функции?

3) Ограниченная ли эта функция?
4) Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения?
5) Является ли эта функция четной (нечетной)?
6) Периодическая ли эта функция?
7) Есть ли у функции промежутки, где она возрастает (убывает)?
8) Есть ли у нее промежутки знакопостоянства?

Именно по такой схеме ранее исследовались, по мере их введения, основные элементарные функции.

Исходя из свойств функции можно построить ее график, для построения которого полезно также знать точки его пересечения с осями координат.

Напомним, что **графиком функции** $y = f(x)$ называют множество тех и только тех точек $A(x; y)$ координатной плоскости xOy, координаты x и y которых удовлетворяют условию $y = f(x)$.

Например, графиком функции $y = x$ является прямая — биссектриса первого и третьего координатных углов.

Отметим, что существуют функции, график которых изобразить невозможно. Такой, например, является функция Дирихле.

Если график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке, есть непрерывная линия, полученная непрерывным движением карандаша без отрыва его острия от бумаги, то эту функцию называют **непрерывной** на этом промежутке.

Можно сказать и так: функцию называют непрерывной на промежутке, если в каждой точке этого промежутка она определена и малому изменению аргумента x соответствует малое изменение функции y.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$; функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$, кроме того, она непрерывна на промежутке $(-\infty; 0)$.

Формальное определение непрерывности функции будет дано в § 2. Согласно этому определению каждая из функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на любом промежутке из области ее существования. ●

ПРИМЕР. Исследуем функцию

$$y = \frac{6}{x^2 + 2} \qquad (1)$$

и построим ее график.

Из формулы (1) можно вывести основные свойства функции $f(x) = \frac{6}{x^2 + 2}$.

1) Функция (1) определена для любых действительных чисел, т. е. область ее определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) Эта функция четная, так как $\frac{6}{(-x)^2+2} = \frac{6}{x^2+2}$ для любых $x \in D(f)$.

3) Функция (1) всюду положительна, ограничена снизу числом 0, а сверху числом 3, так как $f(x) \leqslant 3$ для любых $x \in D(f)$.

4) Наибольшее значение 3 функция $f(x)$ достигает в точке 0, наименьшего значения функция не имеет.

5) Область изменения функции $y = f(x)$ есть промежуток $E(f) = (0; 3]$, так как y принимает все значения из промежутка $(0; 3]$.

6) Функция $f(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$ убывающая. Действительно, пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$, тогда $0 < x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2$. И поскольку функция $y = \frac{6}{u}$ убывающая для $u > 0$, то справедливо неравенство $\frac{6}{x_1^2+2} > \frac{6}{x_2^2+2}$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

7) У этой функции нет нулей, но есть точка $(0; 3)$ пересечения с осью Oy.

Для построения графика функции вычислим координаты нескольких точек графика для $x \geqslant 0$:

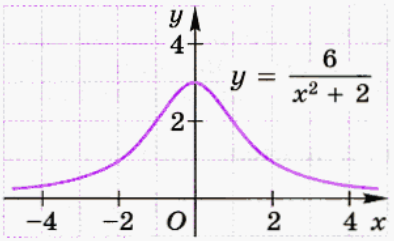


Рис. 6

x	0	1	2	3	4
y	3	2	1	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{3}$

Учитывая перечисленные свойства функции (1), построим ее график сначала для $x \geqslant 0$, а потом симметрично отразим его (так как функция четная) относительно оси Oy (рис. 6).

График иллюстрирует все свойства функции $y = \frac{6}{x^2+2}$.

1.52° На какие вопросы надо ответить при исследовании функции?

1.53° Что называют графиком функции?

1.54 На рисунке 7, *а*, *б* изображен график функции $y = f(x)$. Укажите: область определения, нули, промежутки возрастания (убывания), промежутки знакопостоянства этой функции.

Исследуйте функцию и постройте ее график **(1.55—1.57)**:

1.55 а) $y = |x|$; б) $y = \frac{1}{|x|}$; в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = \frac{1}{x^3}$.

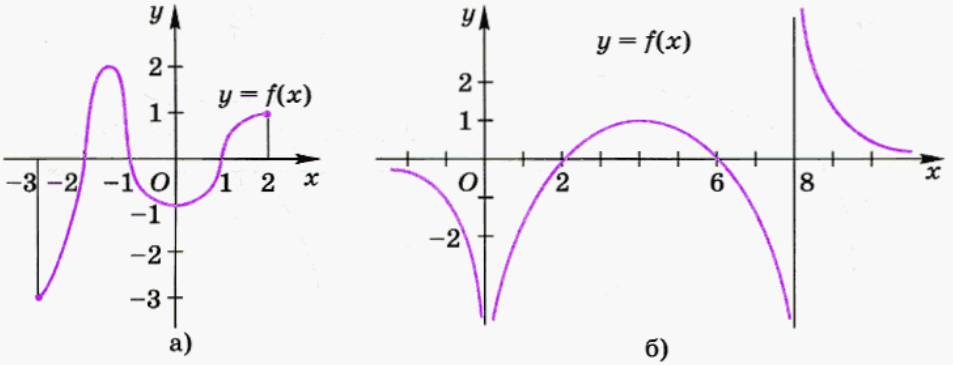


Рис. 7

1.56* а) $y = \dfrac{2 - x^2}{x^2 + 1}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 2}$; в) $y = \dfrac{1 - 2x^2}{3 + x^2}$;

г) $y = \dfrac{2x^2 - 5}{4 + x^2}$; д) $y = \sqrt{\cos x}$; е) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ж) $y = \sqrt{2^x}$; з) $y = \sqrt{\log_2 x}$.

1.57* а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; в) $y = \left(\dfrac{1}{2^x}\right)^2$; г) $y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2$.

1.6. Основные способы преобразования графиков

1. Симметрия относительно осей координат. Функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ имеют одну и ту же область определения. Их графики симметричны относительно оси Ox (рис. 8), так как точки $(x; f(x))$

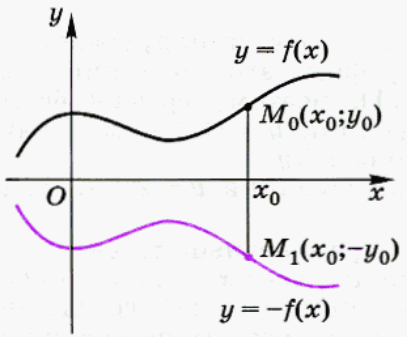


Рис. 8

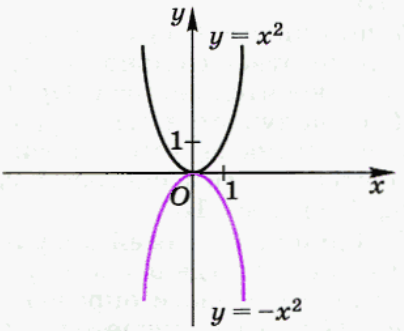


Рис. 9

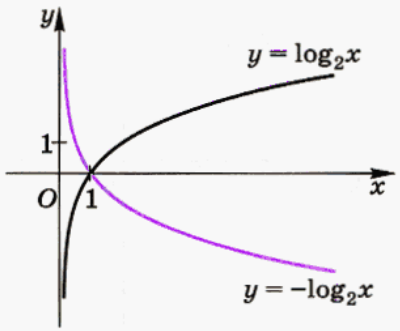


Рис. 10

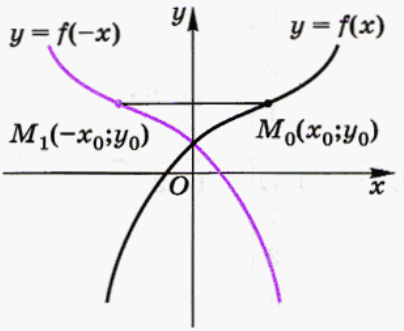


Рис. 11

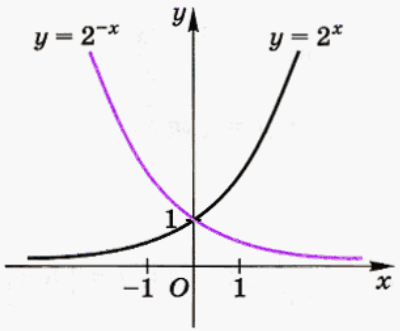


Рис. 12

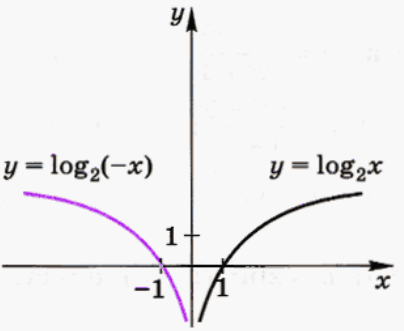


Рис. 13

и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси Ox. Поэтому график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси Ox. Построим этим способом графики функций $y = -x^2$ (рис. 9) и $y = -\log_2 x$ (рис. 10).

Функции $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ имеют области определения, симметричные относительно точки O. Графики этих функций симметричны относительно оси Oy (рис. 11), поэтому график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси Oy.

Построим этим способом графики функций $y = 2^{-x}$ (рис. 12) и $y = \log_2(-x)$ (рис. 13).

2. Сдвиг вдоль осей координат (параллельный перенос). Функция $y = f(x - a)$, где $a \neq 0$, определена для всех x, таких, что $(x - a)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$, график функции $y = f(x - a)$ получается сдвигом вдоль оси Ox на величину $|a|$ графика функции $y = f(x)$ вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.

Действительно, пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0 + a; y_0)$. Так как ее координаты удовлетворяют условию $y_0 = f((x_0 + a) - a)$, то точка M_1 принадлежит графику функции $y = f(x - a)$. Следовательно, каждая точка M_1 графика функции $y = f(x - a)$ получается из соответствующей точки M_0 графика функции $y = f(x)$ сдвигом этой точки вдоль оси Ox на величину a. При этом если $a > 0$, то сдвиг производится вправо на величину a; если $a < 0$, то влево на величину $|a|$. ●

Построим этим способом графики функций $y = (x - 2)^2$ (рис. 14), $y = \log_2(x + 3)$ (рис. 15) и $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 16).

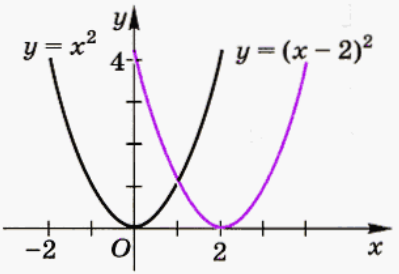


Рис. 14

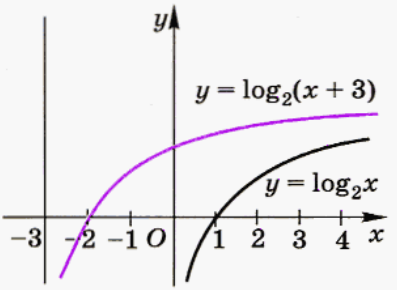


Рис. 15

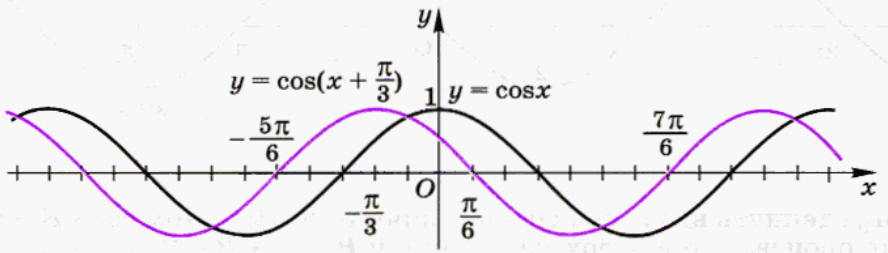


Рис. 16

Функции $y = f(x) + B$, где $B \neq 0$, и $y = f(x)$ имеют одну и ту же область определения. График функции $y = f(x) + B$ получается сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на величину $|B|$ вверх, если $B > 0$, и вниз, если $B < 0$.

Действительно, пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0; y_0 + B)$. Ее координаты удовлетворяют условию $y_0 + B = f(x_0) + B$. Следовательно, чтобы получить точку M_1, надо точ-

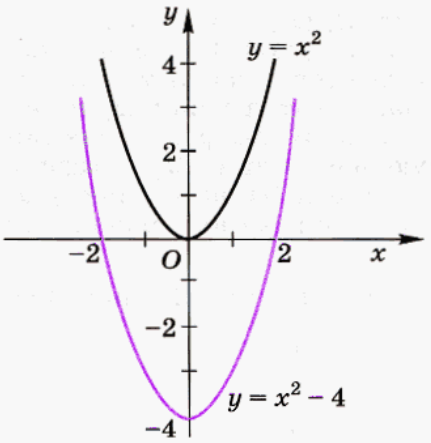


Рис. 17

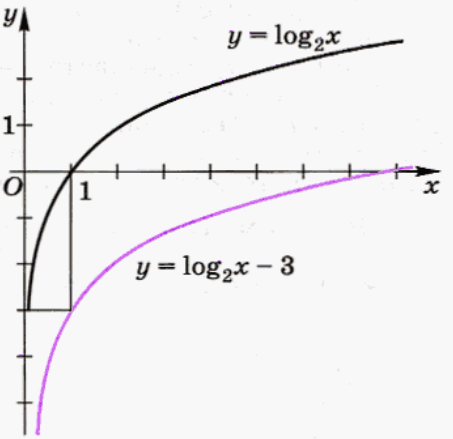


Рис. 18

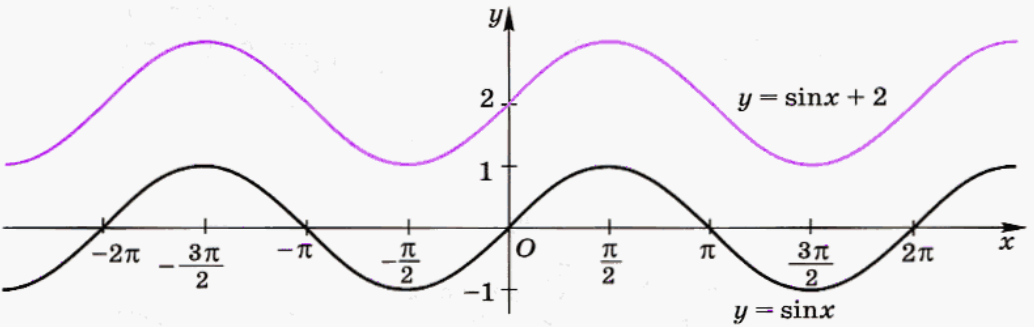


Рис. 19

ку M_0 сдвинуть вдоль оси Oy на величину B. При этом если $B > 0$, то сдвиг производится вверх на величину B; если $B < 0$, то вниз на величину $|B|$. ●

Построим этим способом графики функций $y = x^2 - 4$ (рис. 17), $y = \log_2 x - 3$ (рис. 18) и $y = \sin x + 2$ (рис. 19).

3. Растяжение и сжатие графика вдоль осей координат. Функции $y = f(x)$ и $y = Bf(x)$, где $B > 0$, имеют одну и ту же область определения. График функции $y = Bf(x)$ получается растяжением в B раз, если $B > 1$, и сжатием в $\frac{1}{B}$ раз, если $0 < B < 1$, вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$.

Действительно, пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Возьмем точку $M_1(x_0; By_0)$. Ее координаты удовлетворяют условию $By_0 = Bf(x_0)$, поэтому точка M_1 принадлежит графику функции $y = Bf(x)$. Рассмотрим возможные случаи в зависимости от числа B.

а) $B > 1$. Точка $M_1(x_0; By_0)$ получается из точки $M_0(x_0; y_0)$ увеличением модуля ординаты точки $M_0(x_0; y_0)$ в B раз, и график функции $y = Bf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ увеличением модулей ординат всех точек в B раз, т. е. растяжением в B раз вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$.

б) $0 < B < 1$. Точка $M_1(x_0; By_0)$ получается из точки $M_0(x_0; y_0)$ уменьшением модуля ординаты точки $M_0(x_0; y_0)$ в $\frac{1}{B}$ раз, и график функции $y = Bf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ уменьшением модулей ординат всех точек в $\frac{1}{B}$ раз, т. е. сжатием в $\frac{1}{B}$ раз вдоль оси Oy графика функции $y = f(x)$. ●

Если $B < 0$, то $B = -|B|$, и построение графика функции $y = Bf(x)$ разбивается на два этапа: 1) построение графика функции $y = |B|f(x)$ по графику функции $y = f(x)$; 2) построение графика функции $y = -|B|f(x)$ по графику функции $y = |B|f(x)$.

Построим этим способом графики функций $y = -2x^2$ (рис. 20), $y = 2\sin x$ (рис. 21) и $y = \frac{1}{2}\cos x$ (рис. 22).

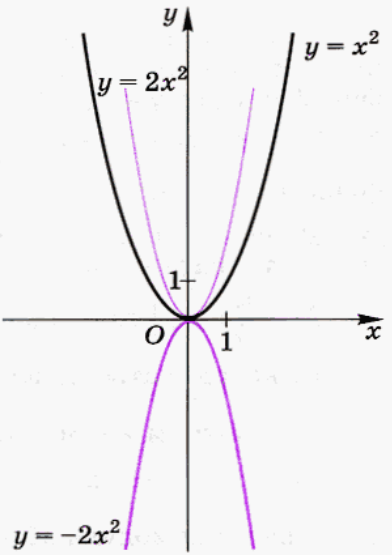


Рис. 20

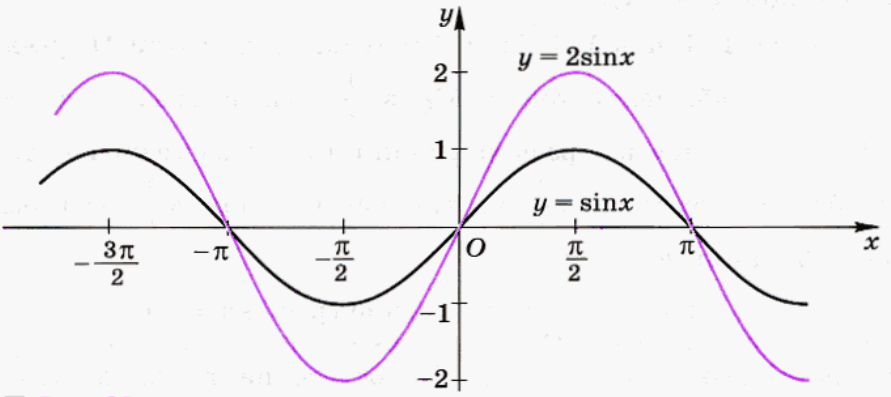


Рис. 21

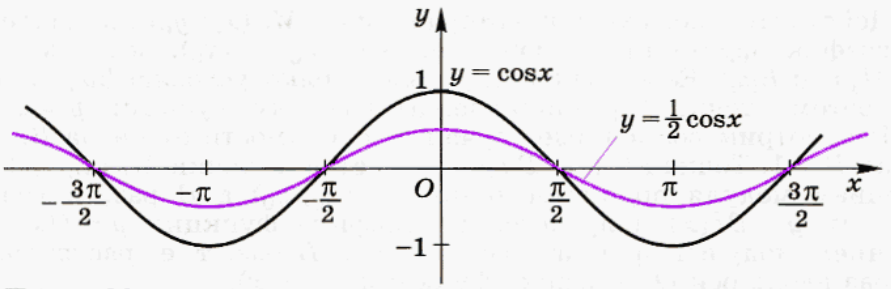


Рис. 22

Функция $y = f(kx)$, где $k > 0$, определена для всех x, таких, что число kx принадлежит области определения функции $y = f(x)$. График функции $y = f(kx)$ получается сжатием в k раз к оси Oy, если $k > 1$, и растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy, если $0 < k < 1$, графика функции $y = f(x)$.

Действительно, пусть некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. пусть $y_0 = f(x_0)$. Точка $M_1\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$, так как ее координаты удовлетворяют условию $y_0 = f\left(k\frac{x_0}{k}\right)$.

Рассмотрим возможные случаи в зависимости от числа k.

а) $k > 1$. Точка $M_1\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ получается из точки $M_0(x_0; y_0)$ уменьшением модуля абсциссы точки M_0 в k раз, и график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ уменьшением модулей абсцисс всех точек в k раз, т. е. сжатием в k раз к оси Oy графика функции $y = f(x)$.

б) $0 < k < 1$. Точка $M_1\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ получается из точки M_0 увеличением модуля абсциссы точки M_0 в $\frac{1}{k}$ раз, и график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ увеличением модулей абсцисс всех точек в $\frac{1}{k}$ раз, т. е. растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy графика функции $y = f(x)$. ●

Если $k < 0$, то $k = -|k|$, и построение графика функции $y = f(kx)$ разбивается на два этапа: 1) построение графика функции $y = f(|k|x)$ по графику функции $y = f(x)$; 2) построение графика функции $y = f(-|k|x)$ по графику функции $y = f(|k|x)$.

Построим этим способом графики функций $y = \sin 2x$ (рис. 23), $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ (рис. 24) и $y = \log_2\left(-\frac{1}{3}x\right)$ (рис. 25).

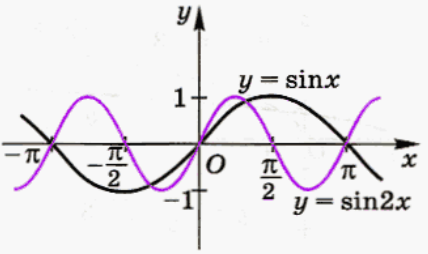


Рис. 23

4. Построение графика функции $y = Af(k(x - a)) + B$ по графику функции $y = f(x)$. График функции $y = Af(k(x - a)) + B$ строится по графику функции $y = f(x)$ последовательным применением рассмотренных выше преобразований графиков. Например, так:

$$y = f(x) \to y = f(kx) \to y = Af(kx) \to$$
$$\to y = Af(k(x - a)) \to y = Af(k(x - a)) + B.$$

Покажем применение этого способа на нескольких примерах.

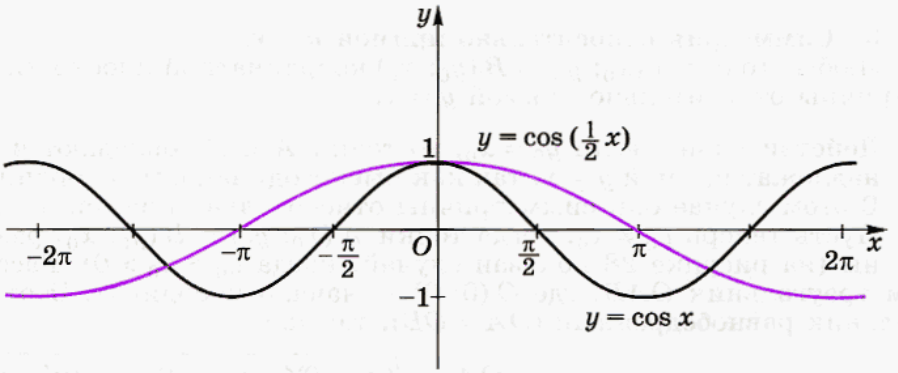


Рис. 24

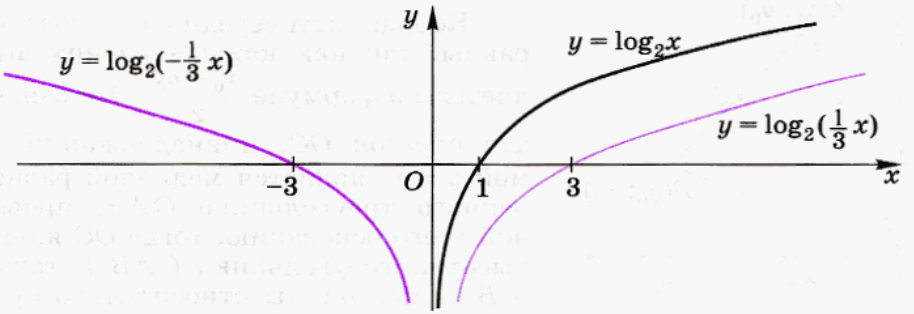


Рис. 25

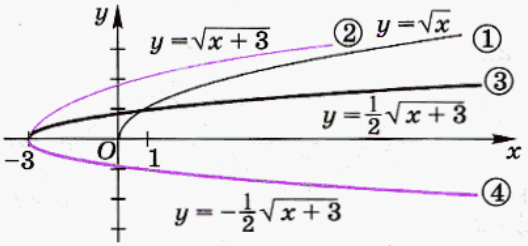


Рис. 26

ПРИМЕР 1. Построим график функции $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+3}$.

Наметим этапы построения этого графика:

$$y=\sqrt{x}\to y=\sqrt{x+3}\to y=\frac{1}{2}\sqrt{x+3}\to y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+3},$$

и построим его (рис. 26).

ПРИМЕР 2. Построим график функции $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

Наметим этапы построения этого графика:

$$y=\sin x\to y=\sin 2x\to y=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)\to y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1,$$

и построим его (рис. 27).

5. Симметрия относительно прямой $y=x$.

Любые точки $A(x_0;\ y_0)$ и $B(y_0;\ x_0)$ координатной плоскости симметричны относительно прямой $y=x$.

Действительно, если $y_0=x_0$, то точки A и B совпадают и принадлежат прямой $y=x$, так как имеют одинаковые координаты. В этом случае они симметричны относительно прямой $y=x$.

Пусть теперь $y_0\neq x_0$, тогда точки $A(x_0;\ y_0)$ и $B(y_0;\ x_0)$ различны (на рисунке 28 показан случай, когда $y_0>x_0>0$). Рассмотрим треугольник OAB, где $O(0;\ 0)$ — начало координат. Этот треугольник равнобедренный ($OA=OB$), так как

$$OA=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2};$$
$$OB=\sqrt{(0-y_0)^2+(0-x_0)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

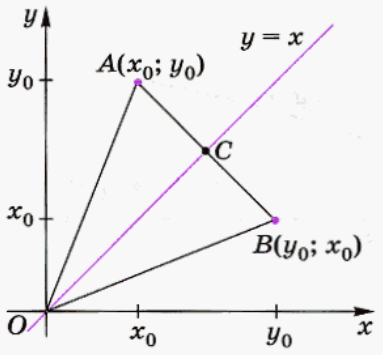
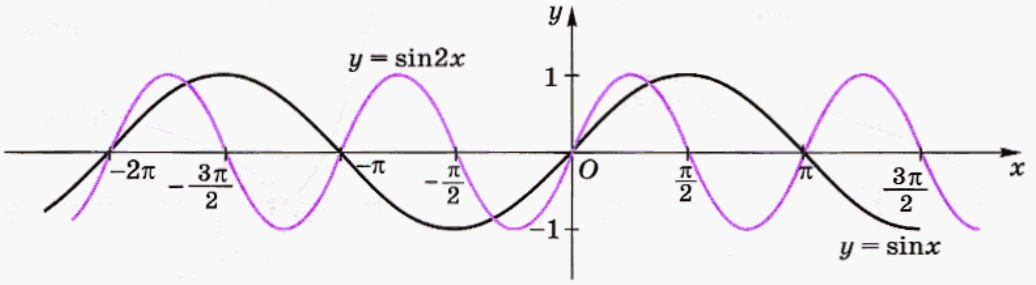
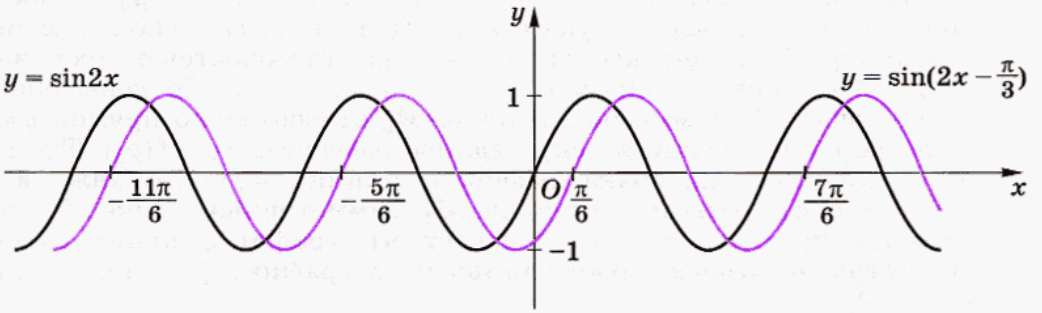


Рис. 28

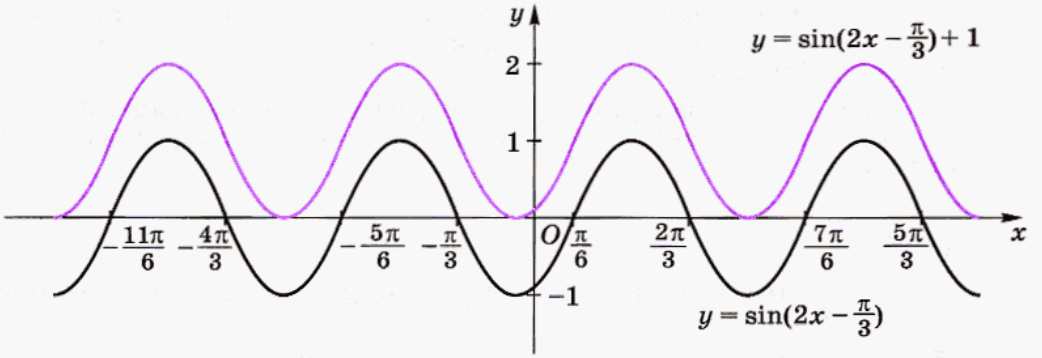
Координаты середины C отрезка AB равны, так как каждая из них вычисляется по формуле $\frac{x_0+y_0}{2}$. Это означает, что отрезок OC, принадлежащий прямой $y=x$, является медианой равнобедренного треугольника OAB, проведенной к его основанию, тогда OC является высотой треугольника OAB и точки A и B симметричны относительно прямой $y=x$. ●


y
y = sin2x
1
−2π
−3π/2
−π
−π/2
O
π/2
π
3π/2
x
−1
y = sinx

а)


y
y = sin2x
y = sin(2x − π/3)
1
−11π/6
−5π/6
O
π/6
7π/6
x
−1

б)


y
y = sin(2x − π/3) + 1
2
1
−11π/6
−4π/3
−5π/6
−π/3
O
π/6
2π/3
7π/6
5π/3
x
−1
y = sin(2x − π/3)

в)

Рис. 27

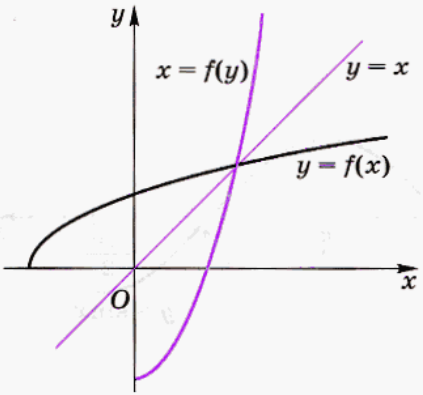


Рис. 29

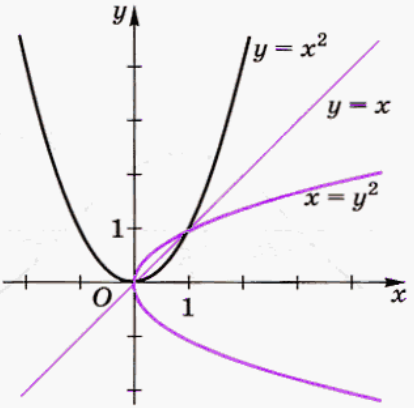


Рис. 30

Пусть дана функция $y = f(x)$ и пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ — произвольная точка графика функции $y = f(x)$, тогда $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим точку $M_1(x_1; y_1)$, координаты которой отличаются от координат точки M_0 лишь порядком (т. е. $x_1 = y_0$, $y_1 = x_0$). По доказанному выше точка M_1 симметрична точке M_0 относительно прямой $y = x$. Для координат точки M_1 справедливо равенство $x_1 = f(y_1)$. Так как M_0 — произвольная точка графика функции $y = f(x)$, то каждой такой точке M_0 соответствует точка M_1, симметричная точке M_0 относительно прямой $y = x$. Это означает, что **график функции $x = f(y)$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = f(x)$** (рис. 29).

ПРИМЕР 3. В системе координат xOy построим графики функций $y = x^2$ и $x = y^2$.

Сначала построим график функции $y = x^2$, затем отразим его симметрично относительно прямой $y = x$. Получится график функции $x = y^2$ (рис. 30).

Замечание. Подчеркнем, что у рассмотренных выше функций $x = f(y)$ и $x = y^2$ независимой переменной является y, а зависимой переменной x.

В системе координат xOy постройте графики функций **(1.58—1.64):**

1.58 а) $y = x^3$ и $y = -x^3$;
б) $y = x^4$ и $y = -x^4$;
в) $y = 3^x$ и $y = -3^x$;
г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;
д) $y = \sin x$ и $y = -\sin x$;
е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -\operatorname{tg} x$.

1.59 а) $y = x^3$ и $y = (-x)^3$; б) $y = x^4$ и $y = (-x)^4$;
в) $y = 3^x$ и $y = 3^{-x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$;
д) $y = \sin x$ и $y = \sin(-x)$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}(-x)$.

1.60 а) $y = x^3$ и $y = (x+1)^3$; б) $y = x^4$ и $y = (x-1)^4$;
в) $y = 3^x$ и $y = 3^{x-2}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$;
д) $y = \sin x$ и $y = \sin(x-1)$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}(x+2)$.

1.61 а) $y = x^3$ и $y = x^3 + 1$; б) $y = x^4$ и $y = x^4 - 1$;
в) $y = 3^x$ и $y = 3^x - 2$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$;
д) $y = \sin x$ и $y = \sin x - 2$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg} x + 2$.

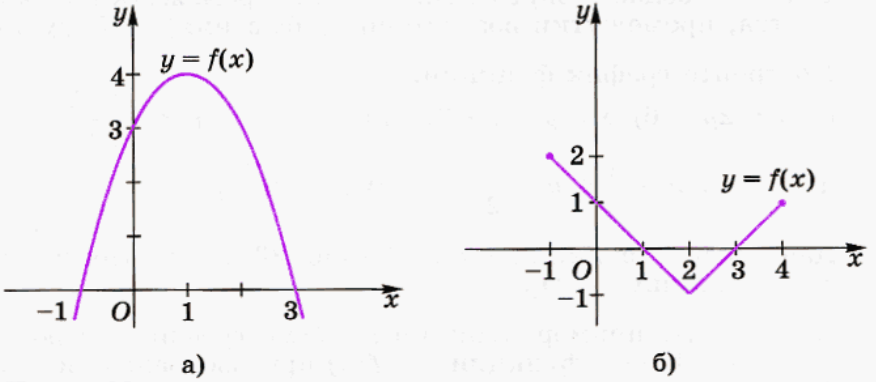
1.62 а) $y = x^3$ и $y = 2x^3$; б) $y = x^4$ и $y = -2x^4$;
в) $y = 3^x$ и $y = -2 \cdot 3^x$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = 2\log_{\frac{1}{3}} x$;
д) $y = \sin x$ и $y = 3\sin x$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2\operatorname{tg} x$.

1.63 а) $y = x^3$ и $y = (2x)^3$; б) $y = x^4$ и $y = (-2x)^4$;
в) $y = 3^x$ и $y = 3^{2x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}}(-2x)$;
д) $y = \sin x$ и $y = \sin 3x$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}(-2x)$.

1.64 а) $y = x^3$ и $x = y^3$; б) $y = x^4$ и $x = y^4$;
в) $y = 3^x$ и $x = 3^y$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} y$;
д) $y = \sin x$ и $x = \sin y$; е) $y = \operatorname{tg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$.

1.65 Постройте график функции:
а) $y = x^2 + 2x + 3$; б) $y = 2(x-1)^3 - 3$;
в) $y = 2 \cdot 3^{x+1} - 6$; г) $y = 2\log_{\frac{1}{3}}(-2x+3) - 4$;
д) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$; е) $y = -2\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$.

1.66 Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 31, *а*, *б*).



а) б)

Рис. 31

Постройте график функции:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = f(x-2)$; г) $y = f(x+3)$;

д) $y = f(x+1) - 2$; е) $y = f(x-2) + 1$; ж) $y = 2f(x)$;

з) $y = \frac{1}{2} f(x)$; и) $y = f(2x)$; к) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

1.67 Постройте график функции:

а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{-4}{x}$; в) $y = \frac{4}{x} + 2$;

г) $y = \frac{4}{x-2}$; д) $y = \frac{4}{x+2} - 2$; е) $y = \frac{-4}{x-1}$;

ж) $y = \frac{-4}{x+3} - 2$; з) $y = \frac{6}{x-3} + 1$; и) $y = \frac{-8}{x+1} - 3$.

1.68* Уравнение окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, поэтому графиком функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ является верхняя полуокружность (рис. 32).

Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

б) $y = -\sqrt{4 - x^2}$;

в) $y = \sqrt{9 - (x-1)^2}$;

г) $y = -\sqrt{9 - (x+1)^2}$;

д) $y = \sqrt{16 - (x+2)^2} - 2$;

е) $y = -\sqrt{25 - (x-3)^2} + 1$.

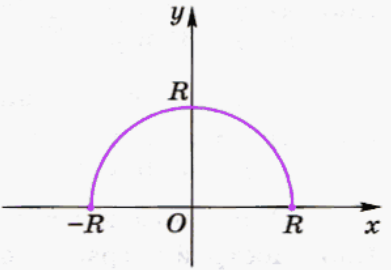


Рис. 32

1.69 Постройте график функции:

а) $y = 3 - \sqrt{9 - x^2 + 8x}$; б) $y = 4 - \sqrt{9 - x^2 - 8x}$;

в) $y = 12 - \sqrt{125 - x^2 - 20x}$; г) $y = -5 + \sqrt{69 - x^2 + 20x}$.

Укажите область определения, нули, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания (убывания) этой функции.

1.70 Постройте график функции:

а) $x = 2y$; б) $x = y^2$, $y \geqslant 0$; в) $x = 2^y$; г) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$;

д) $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; е) $x = \sqrt{1 - y^2}$.

1.71 Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 33, *а—г*). Постройте график функции $x = f(y)$.

1.72 Придумайте пример функции $y = f(x)$, график которой совпадает с графиком функции $x = f(y)$ при изображении этих графиков в одной системе координат xOy.

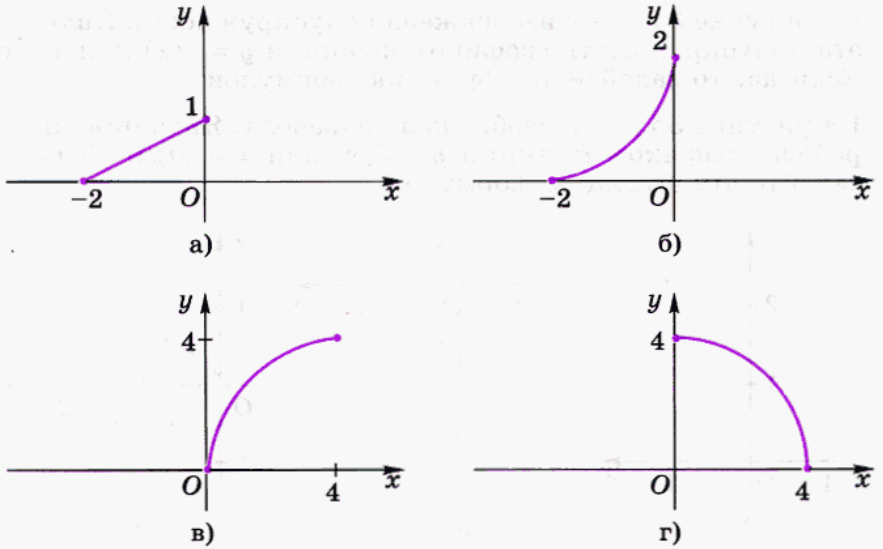

y
1
−2
O
x
а)
y
2
−2
O
x
б)
y
4
O
4
x
в)
y
4
O
4
x
г)

Рис. 33

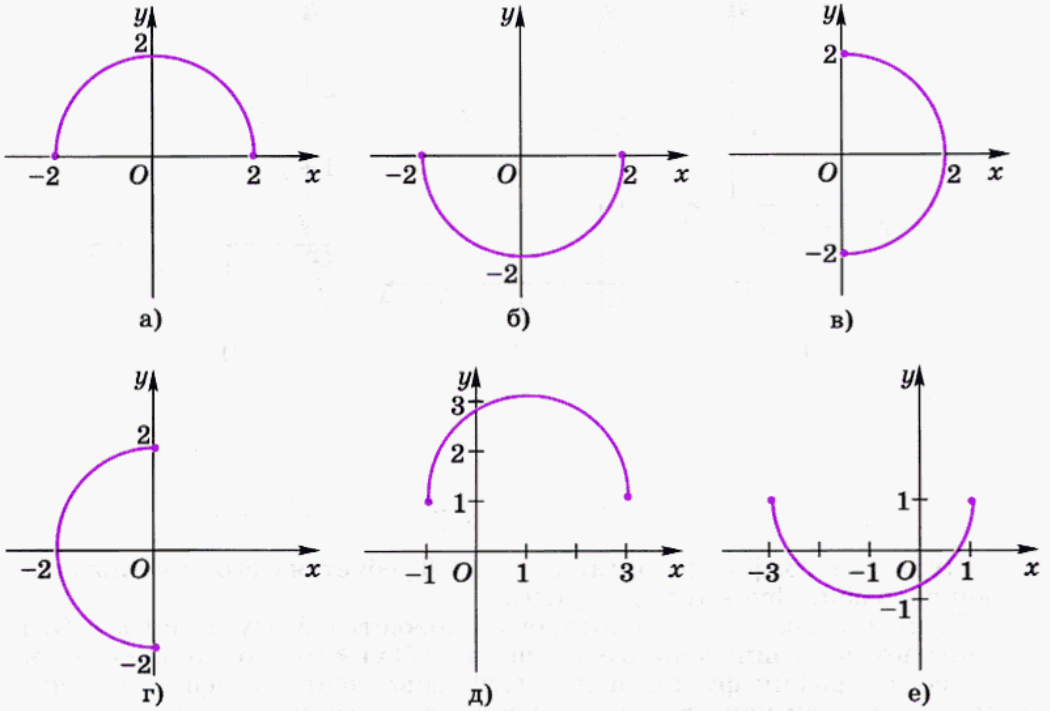

y
2
−2
O
2
x
а)
y
−2
O
2
x
−2
б)
y
2
O
2
x
−2
в)
y
2
−2
O
x
−2
г)
y
3
2
1
−1
O
1
3
x
д)
y
1
−3
−1
O
1
x
−1
е)

Рис. 34

1.73 На рисунке 34, *а*—*е* изображена полуокружность. Является ли эта полуокружность графиком функции $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$? Если да, то задайте эту функцию формулой.

1.74 На рисунке 35, *а*—*е* изображена парабола. Является ли эта парабола графиком функции $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$? Если да, то задайте эту функцию формулой.

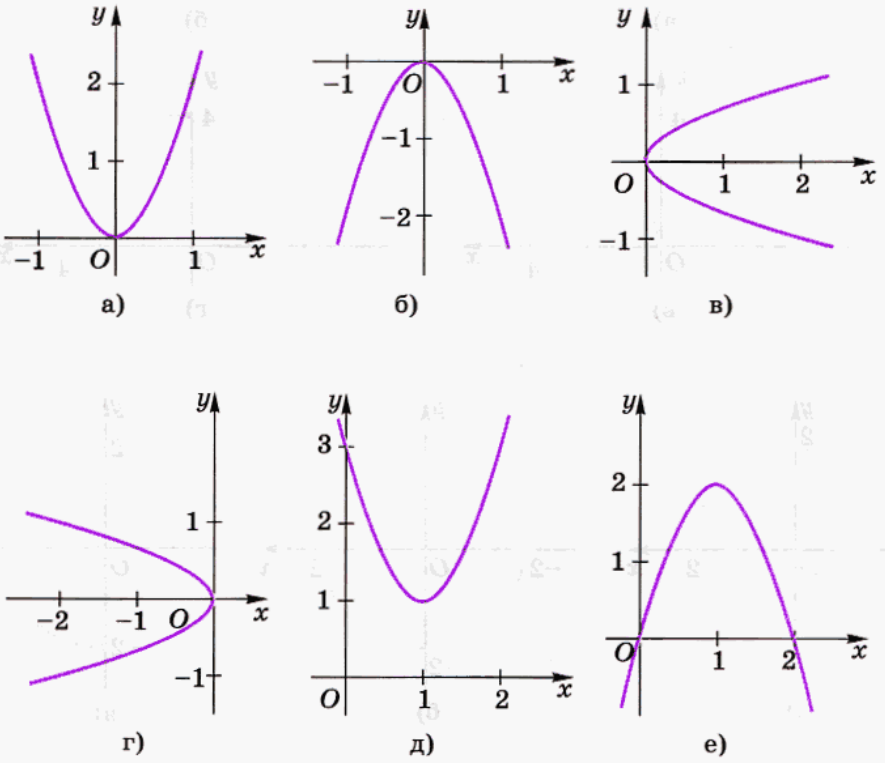


Рис. 35

1.7*. Графики функций, содержащих модули

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Требуется с его помощью построить график функции $y = |f(x)|$.

Если для всех x из некоторого множества X функция $y = f(x)$ принимает неотрицательные значения ($f(x) \geqslant 0$), то на всем этом множестве график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, так как для каждого x из этого множества справедливо равенство $|f(x)| = f(x)$.

Если же для всех x из некоторого множества X_1 функция $y = f(x)$ принимает отрицательные значения ($f(x) < 0$), то на этом множестве график функции $y = |f(x)|$ получается симметричным отражением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox, так как для каждого x из этого множества справедливо равенство $|f(x)| = -f(x)$.

Таким образом, для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить ту часть графика функции $y = f(x)$, точки которой находятся на оси Ox или выше этой оси, и симметрично отразить относительно оси Ox ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси Ox (рис. 36).

Заметим, что график функции $y = |f(x)|$ не имеет точек, лежащих ниже оси Ox.

Построим этим способом графики функций $y = |x^2 - 1|$ (рис. 37), $y = |\log_2 x|$ (рис. 38), $y = |\sin x|$ (рис. 39).

Пусть теперь дан график функции $y = f(x)$, определенной на множестве X, и с его помощью требуется построить график функции $y = f(|x|)$.

Заметим, что если точка x принадлежит области определения функции $y = f(|x|)$, то и точка $-x$ также ей принадлежит, так как $|-x| = |x|$. Тогда для любого x из области определения функции $y = f(|x|)$ справедливо равенство $f(|-x|) = f(|x|)$, т. е. функция $y = f(|x|)$ четная.

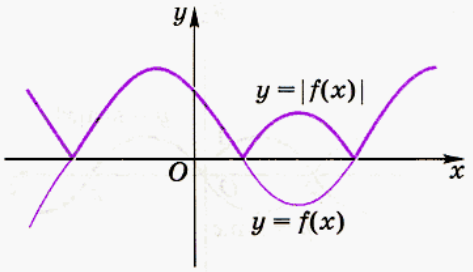


Рис. 36

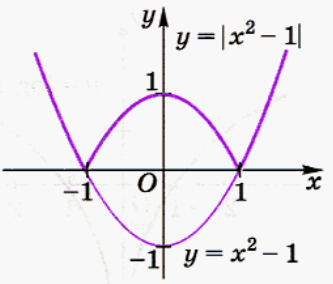


Рис. 37

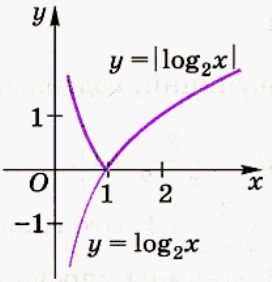


Рис. 38

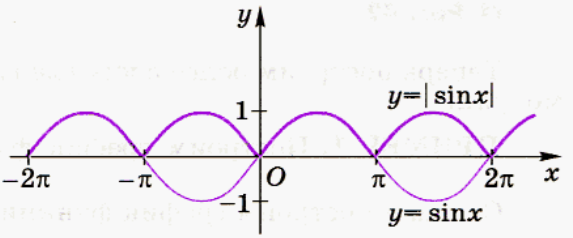


Рис. 39

Для всех $x \geqslant 0$, $x \in X$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, так как для каждого $x \geqslant 0$, $x \in X$ справедливо равенство $f(|x|) = f(x)$. Это правая часть графика функции $y = f(|x|)$, а левая его часть симметрична правой относительно оси Oy, так как функция $y = f(|x|)$ четная.

Таким образом, для построения графика функции $y = f(|x|)$ надо сохранить только ту часть графика функции $y = f(x)$, точки которой находятся на оси Oy или справа от нее, и симметрично отразить эту часть относительно оси Oy (рис. 40).

Построим этим способом графики функций $y = 2^{|x|}$ (рис. 41), $y = \log_2|x|$ (рис. 42), $y = \sin|x|$ (рис. 43).

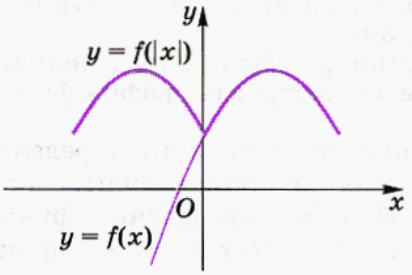


Рис. 40

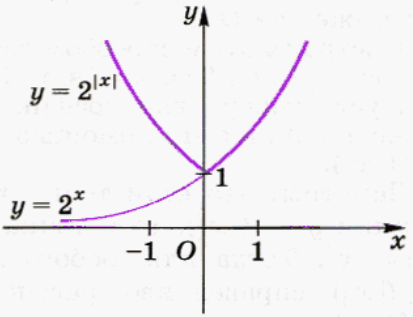


Рис. 41

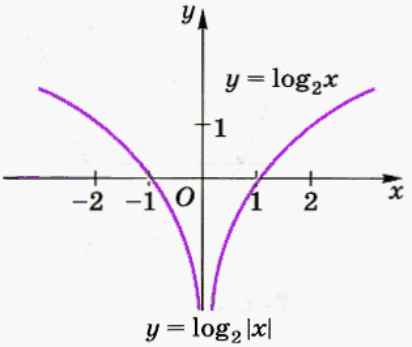


Рис. 42

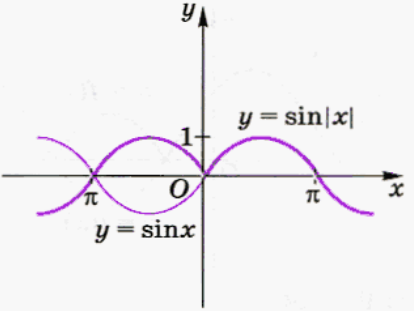


Рис. 43

Теперь построим более сложные графики функций, содержащих модули.

ПРИМЕР 1. Построим график функции $y = \left|\dfrac{2}{x-2} + 1\right|$.

Сначала построим график функции $\varphi(x) = \dfrac{2}{x-2} + 1$. Это гипербола, полученная сдвигом гиперболы $y = \dfrac{2}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх (рис. 44).

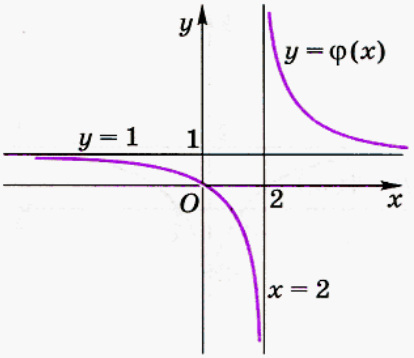


Рис. 44

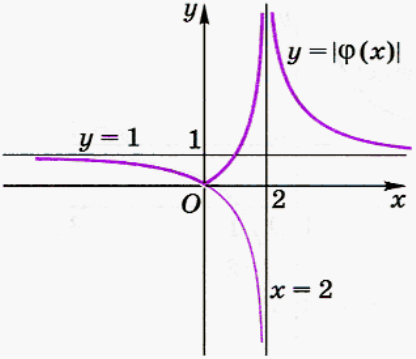


Рис. 45

Для построения графика функции $y = \left| \frac{2}{x-2} + 1 \right|$ сохраним ту часть графика функции $y = \varphi(x)$, точки которой находятся на оси Ox или выше ее, и симметрично отразим относительно оси Ox ту часть графика функции $y = \varphi(x)$, которая расположена ниже оси Ox (рис. 45).

ПРИМЕР 2. Построим график функции $y = \frac{2}{|x| - 2} + 1$.

Сначала построим график функции $\varphi(x) = \frac{2}{x-2} + 1$ (см. рис. 44). Для построения графика функции $y = \varphi(|x|)$ сохраним ту часть графика функции $y = \varphi(x)$, точки которой находятся на оси Oy или справа от нее (рис. 46). Затем симметрично отразим эту часть относительно оси Oy (рис. 47).

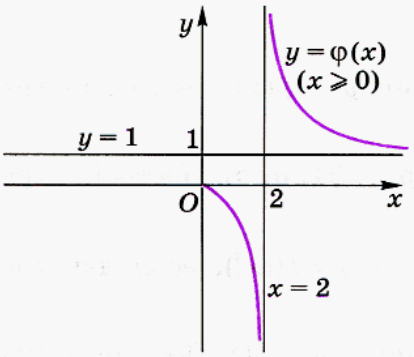


Рис. 46

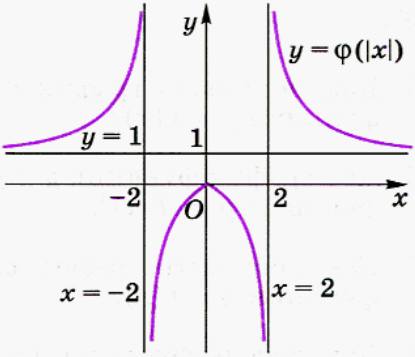


Рис. 47

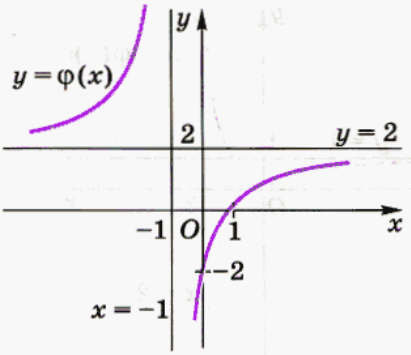


Рис. 48

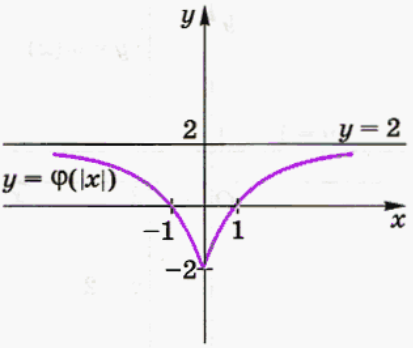


Рис. 49

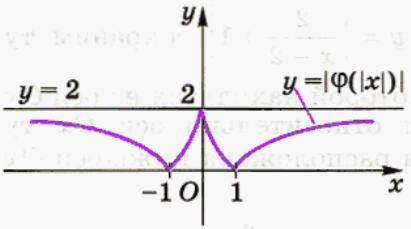


Рис. 50

ПРИМЕР 3. Построим график функции $y = \left| \dfrac{-4}{|x| + 1} + 2 \right|$.

Сначала построим график функции $\varphi(x) = \dfrac{-4}{x + 1} + 2$. Это гипербола, полученная сдвигом гиперболы $y = \dfrac{-4}{x}$ на 1 единицу влево и на 2 единицы вверх (рис. 48).

Затем описанным выше способом с помощью графика функции $y = \varphi(x)$ построим сначала график функции $y = \varphi(x)$, $x \geqslant 0$, потом график функции $y = \varphi(|x|)$ (рис. 49), а с помощью этого графика построим график функции $y = |\varphi(|x|)|$ (рис. 50). Это и будет график функции $y = \left| \dfrac{-4}{|x| + 1} + 2 \right|$.

1.75° Как построить график функции $y = |f(x)|$, если дан график функции $y = f(x)$?

1.76 Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 51, *а*, *б*). Постройте график функции $y = |f(x)|$.

1.77° Как построить график функции $y = f(|x|)$, если дан график функции $y = f(x)$?

1.78 Дан график функции $y = f(x)$ (см. рис. 51). Постройте график функции $y = f(|x|)$.

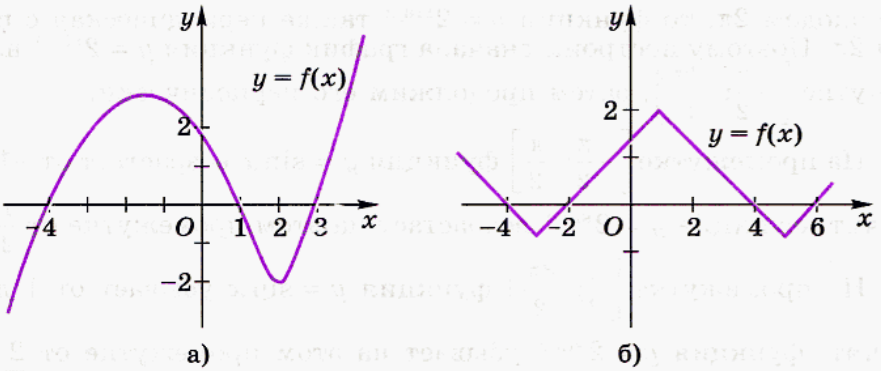


Рис. 51

Постройте график функции **(1.79—1.83):**

1.79 а) $y = |x^2 - 4|$; б) $y = \left|\frac{4}{x} - 1\right|$; в) $y = |\log_2 x|$; г) $y = |2^x - 2|$.

1.80 а) $y = 1 - \frac{1}{|x|}$; б) $y = \frac{1}{|x|} + 2$; в) $y = 3^{|x|}$; г) $y = 3^{-|x|}$.

1.81 а) $y = x^2 - 5|x - 1| + 1$; б) $y = |x^2 - 3x + 2| + 2x - 3$;
в) $y = (x + 1)(|x| - 2)$; г) $y = |x^2 + 3x - 2| - |5x - 2|$;
д) $y = \frac{2x - 6}{|3 - x|}$; е) $y = \frac{2|x| + 1}{2 - x}$;
ж) $y = \sin|x|$; з) $y = |\cos|x||$.

1.82 а) $y = [\sin x]$; б) $y = \{\sin x\}$; в) $y = [\cos x]$;
г) $y = \{\cos x\}$; д) $y = |[\sin x]|$; е) $y = |\{\sin x\}|$;
ж) $y = |[\cos x]|$; з) $y = |\{\cos x\}|$.

1.83 а) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$; б) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$; в) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|}$;
г) $y = \sin x + |\sin x|$; д) $y = \cos x + |\cos x|$.

1.8*. Графики сложных функций

1. График суперпозиции функций. Рассмотрим примеры, показывающие, как построить график сложной функции $y = f(\varphi(x))$, если дан график функции $u = \varphi(x)$ и известны свойства функции $y = f(u)$.

ПРИМЕР 1. Построим график функции $y = 2^{\sin x}$.

Область определения функции $y = 2^{\sin x}$ — множество всех действительных чисел. Поскольку функция $y = \sin x$ периодическая

с периодом 2π, то функция $y = 2^{\sin x}$ также периодическая с периодом 2π. Поэтому построим сначала график функции $y = 2^{\sin x}$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, затем продолжим его периодически.

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до 1, значит, функция $y = 2^{\sin x}$ возрастает на этом промежутке от $\frac{1}{2}$ до 2.

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до -1, значит, функция $y = 2^{\sin x}$ убывает на этом промежутке от 2 до $\frac{1}{2}$.

Перечисленные свойства позволяют построить схематический график $y = 2^{\sin x}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, затем продолжить его периодически (рис. 52).

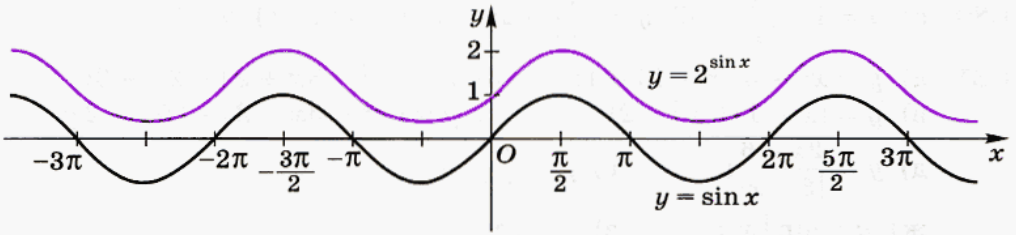


Рис. 52

ПРИМЕР 2. Построим график функции $y = \log_2 \sin x$.

Область определения функции $y = \log_2 \sin x$ — множество всех действительных чисел x, для каждого из которых $\sin x > 0$. Поскольку функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, то функция $y = \log_2 \sin x$ также периодическая с периодом 2π. Поэтому сначала построим график функции $y = \log_2 \sin x$ на промежутке $(0; 2\pi]$, затем продолжим его периодически.

На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от 0 до 1, значит, функция $y = \log_2 \sin x$ возрастает на этом промежутке от $-\infty$ до 0.

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ функция $y = \sin x$ убывает от 1 до 0, значит, функция $y = \log_2 \sin x$ убывает на этом промежутке от 0 до $-\infty$.

На промежутке $[\pi; 2\pi]$ функция $y = \sin x$ неположительна, поэтому функция $y = \log_2 \sin x$ на этом промежутке не определена.

Перечисленные свойства позволяют построить график функции $y = \log_2 \sin x$ на промежутке $(0; 2\pi]$, затем продолжить его периодически (рис. 53).

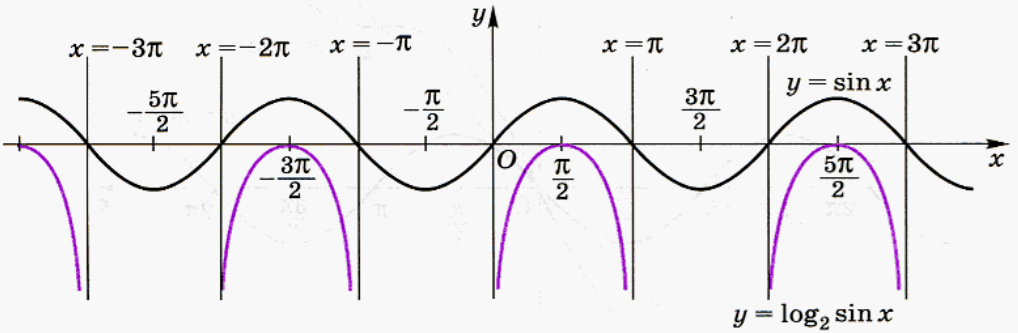


Рис. 53

2. График суммы функций. Пусть даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Тогда функция $y = f(x) + g(x)$ имеет область существования X, которая есть общая часть (пересечение) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Пусть $x_0 \in X$ и точка $M_1(x_0; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, а точка $M_2(x_0; y_2)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Тогда точка $M_0(x_0; y_1 + y_2)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + g(x)$. Значит, для построения графика функции $y = f(x) + g(x)$ следует:

а) оставить только те точки графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$, у которых $x \in X$;

б) произвести сложение ординат точек графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ для каждого $x \in X$.

Построим таким способом графики двух функций $y = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$ (рис. 54) и $y = x + \sin x$ (рис. 55).

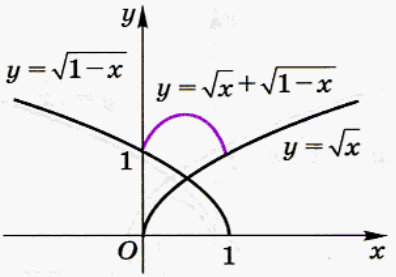


Рис. 54

3. График произведения функций. Пусть даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Тогда функция $y = f(x) \cdot g(x)$ имеет область существования X, которая есть общая часть (пересечение) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Пусть $x_0 \in X$ и точка $M_1(x_0; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, а точка $M_2(x_0; y_2)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Тогда точка $M_0(x_0; y_1 \cdot y_2)$

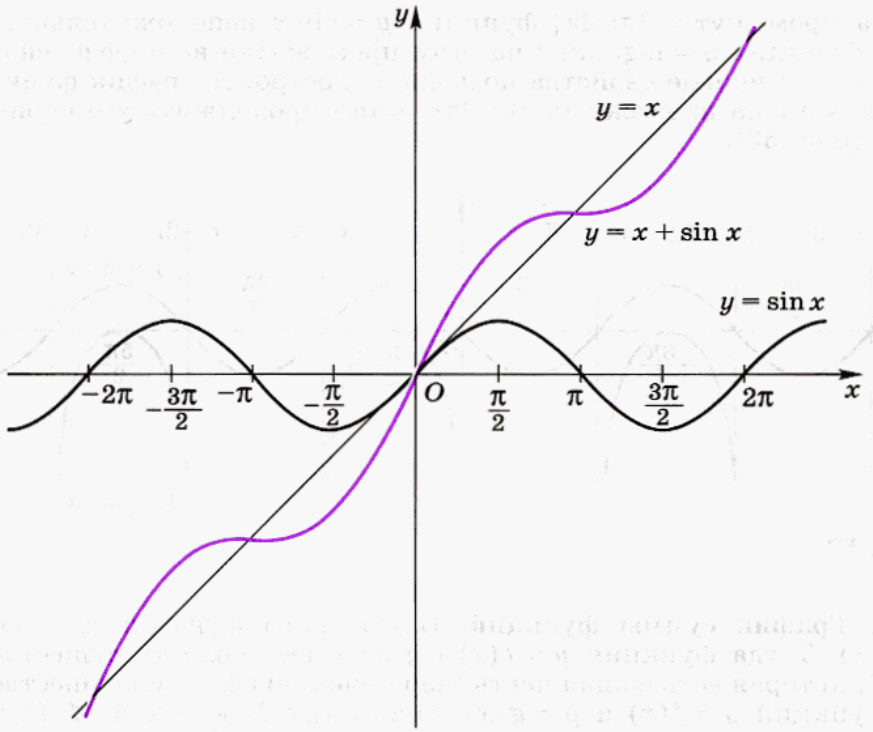


Рис. 55

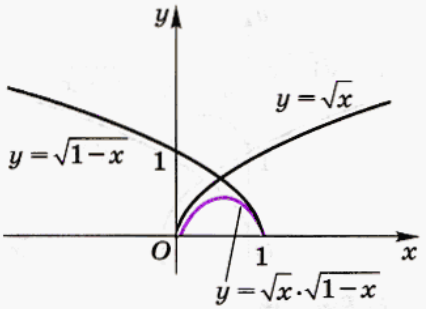


Рис. 56

принадлежит графику функции $y = f(x) \cdot g(x)$. Значит, для построения графика функции $y = f(x) \cdot g(x)$ следует:

а) оставить только те точки графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$, у которых $x \in X$;

б) произвести умножение ординат точек графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$ для каждого $x \in X$.

Построим таким способом графики двух функций $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$ (рис. 56) и $y = x \sin x$ (рис. 57).

4. График кусочно-заданной функции. Простейшим примером кусочно-заданной функции является функция $y = |x|$, которая определяется так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

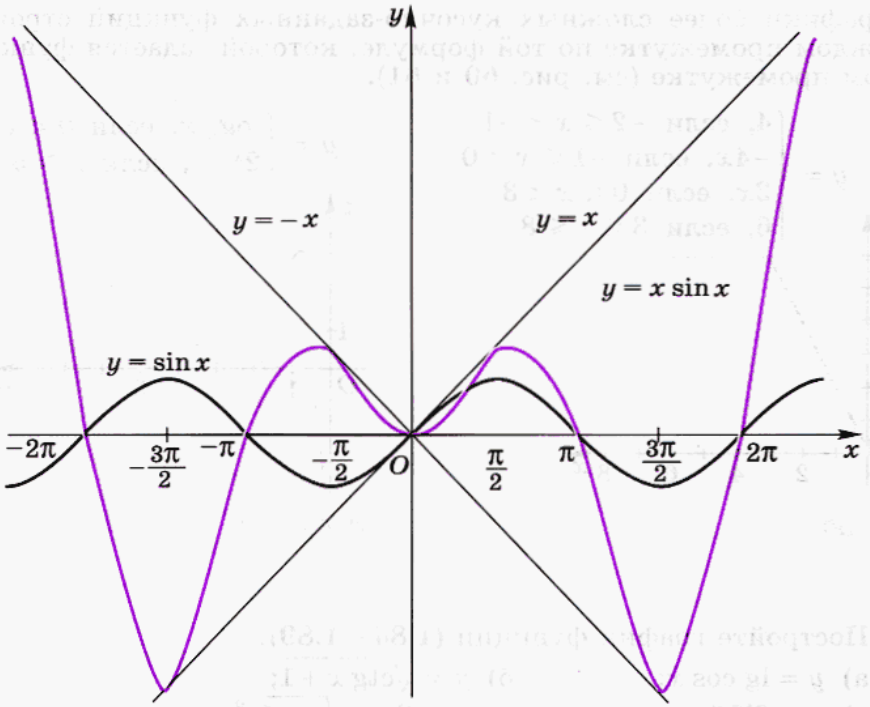


Рис. 57

Еще один пример кусочно-заданной функции — это функция $y = \operatorname{sgn} x$ («сигнум» x — знак x), которая определяется так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рисунках 58 и 59.

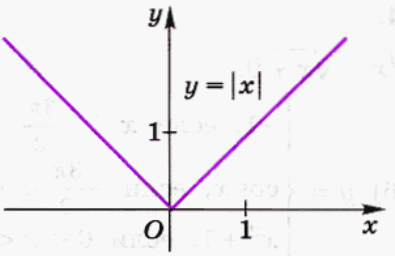


Рис. 58

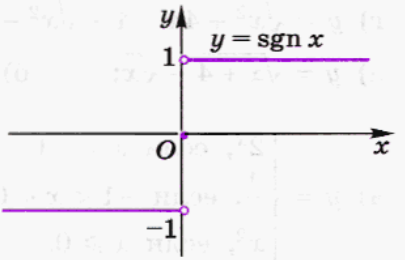


Рис. 59

Графики более сложных кусочно-заданных функций строятся на каждом промежутке по той формуле, которой задается функция на этом промежутке (см. рис. 60 и 61).

$$y = \begin{cases} 4, \text{ если } -2 \leqslant x < -1 \\ -4x, \text{ если } -1 \leqslant x < 0 \\ 2x, \text{ если } 0 \leqslant x < 3 \\ 6, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$$

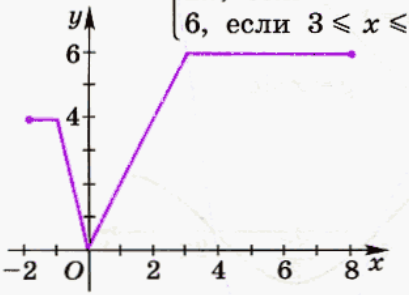


Рис. 60

$$y = \begin{cases} \log_5 x, \text{ если } 0 < x < 5 \\ 2^{x-5}, \text{ если } x \geqslant 5 \end{cases}$$

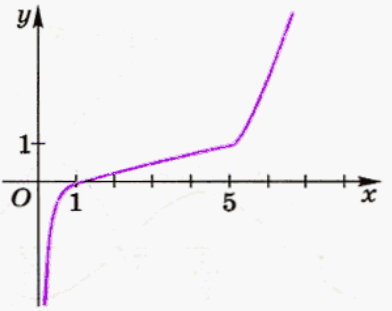


Рис. 61

Постройте график функции **(1.84—1.89)**:

1.84 а) $y = \lg \cos x$; б) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x + 1}$;
в) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$; г) $y = (\log_2 \sqrt{x-1})^3$.

1.85 а) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{2-x}$; б) $y = 2^x + \sin x$;
в) $y = \operatorname{tg} x - \log_3 x$; г) $y = \operatorname{ctg} x + \sqrt[3]{x^2}$.

1.86 а) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{2-x}$; б) $y = 2^x \cdot \sin x$;
в) $y = \operatorname{tg} x \cdot \log_3 x$; г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

1.87 а) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
б) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$;
в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$;
г) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

1.88 а) $y = \sqrt{x+4} - \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} - \sqrt{x+9}$.

1.89 а) $y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } -1 < x < 0 \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -1, \text{ если } x \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \\ \cos x, \text{ если } -\dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant 0 \\ x^2 + 1, \text{ если } 0 < x < 1 \\ \log_2(x+3), \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{если } -2 < x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \log_2 x, & \text{если } x > 4; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } \dfrac{\pi}{4} < x < \pi \\ \sin x, & \text{если } \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

§ 2. Предел функции и непрерывность

2.1. Понятие предела функции

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x^3}$. Она определена для всех x, кроме $x = 0$.

Посмотрим, как изменяются значения этой функции при неограниченном возрастании x.

x	1	2	4	8	10	10^2	10^5	10^{10}
$y = \dfrac{1}{x^3}$	1	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{1}{512}$	$\dfrac{1}{1000}$	$\dfrac{1}{10^6}$	$\dfrac{1}{10^{15}}$	$\dfrac{1}{10^{30}}$

Очевидно, что значения функции $y = \dfrac{1}{x^3}$ стремятся (приближаются) к нулю, когда независимая переменная x неограниченно возрастает, оставаясь положительной, т. е. $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ при $x \to +\infty$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$, и говорят, что пределом функции $y = \dfrac{1}{x^3}$ при x, стремящемся к $+\infty$ ($x \to +\infty$), является число нуль.

Аналогично рассуждая, получим, что $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ при $x \to -\infty$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$.

Рассмотрим теперь функцию $y = x^3$. Она определена для всех x.

Посмотрим, как изменяются значения этой функции при неограниченном возрастании x.

x	1	2	4	8	10	10^2	10^5	10^{10}
$y = x^3$	1	8	64	512	10^3	10^6	10^{15}	10^{30}

Очевидно, что значения этой функции неограниченно возрастают, т. е. стремятся к $+\infty$, когда независимая переменная x неограни-

ченно возрастает, т. е. $x^3 \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, и говорят, что пределом функции $y = x^3$ при $x \to +\infty$ является $+\infty$.

Аналогично рассуждая, получим, что $x^3 \to -\infty$ при $x \to -\infty$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$, определенную для всех $x > M$, где M — некоторое неотрицательное число.

Говорят, что **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ является A, если из того, что x неограниченно возрастает, следует, что соответствующие значения функции $f(x)$ стремятся к A, т. е. если $f(x) \to A$ при $x \to +\infty$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

В этих определениях A может быть или любым числом, или $+\infty$, или $-\infty$.

ПРИМЕР 1. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ определена для всех $x > 0$ и для всех $x < 0$. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

ПРИМЕР 2. Функция $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$ определена для всех $x \neq 1$. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x-1} + 2 \right) = 2$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-1} + 2 \right) = 2$.

ПРИМЕР 3. Функция $y = x^5$ определена для всех x. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$.

Рассмотрим функцию $y = x^0$. Она определена для всех x, кроме $x = 0$, так как запись 0^0 не имеет смысла.

Так как для всех $x \neq 0$ соответствующие значения этой функции равны 1, то очевидно, что когда x стремится к нулю ($x \to 0$), то соответствующие значения этой функции, равные 1, стремятся к 1, т. е. $x^0 \to 1$ при $x \to 0$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to 0} x^0 = 1$, и говорят, что пределом функции $y = x^0$ при x, стремящемся к 0, является число 1.

Рассмотрим теперь функцию $y = \dfrac{1}{|x-2|}$. Она определена для всех x, кроме $x = 2$. Для всех $x \neq 2$ соответствующие значения этой функции положительны, и при $x \to 2$ они неограниченно возрастают, т. е. $\dfrac{1}{|x-2|} \to +\infty$ при $x \to 2$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x-2|} = +\infty$, и го-

ворят, что пределом функции $y = \frac{1}{|x-2|}$ при x, стремящемся к 2, является $+\infty$.

Аналогично рассуждая, получаем, что $\frac{-1}{|x-2|} \to -\infty$ при $x \to 2$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-1}{|x-2|} = -\infty$, и говорят, что пределом функции $y = \frac{-1}{|x-2|}$ при x, стремящемся к 2, является $-\infty$.

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой точки a, т. е. пусть она определена для каждого x, удовлетворяющего неравенствам $a - \delta < x < a + \delta$ при некотором $\delta > 0$, за исключением, быть может, самой точки a. Говорят, что **пределом функции** $y = f(x)$ в точке a является A, если из того, что $x \to a$, оставаясь в окрестности точки a, следует, что соответствующие значения функции $f(x)$ стремятся к A, т. е. если $f(x) \to A$ при $x \to a$. Это записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

В этом определении A может быть или любым числом, или $+\infty$, или $-\infty$.

ПРИМЕР 4. Функция $y = x^2$ определена для всех x; в частности, она определена в любой окрестности точки 2 (включая саму точку 2). Нетрудно видеть, что если $x \to 2$, то соответствующие значения функции $y = x^2$ стремятся к 4. Следовательно, пределом функции $y = x^2$ при $x \to 2$ является число 4: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

ПРИМЕР 5. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ определена для всех x, кроме $x = 0$, поэтому, в частности, она определена в любой окрестности точки 0, за исключением самой точки 0. Ясно, что если $x \to 0$, то соответствующие значения функции $y = \frac{1}{x^2}$ остаются положительными и неограниченно возрастают. Следовательно, пределом функции $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ является $+\infty$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Замечание. Часто вместо слов «пределом функции является A» говорят «функция имеет предел A» или «предел функции равен A». В частности, говорят «функция $y = \frac{-1}{|x-2|}$ при $x \to 2$ имеет предел $-\infty$» или «предел функции $y = \frac{-1}{|x-2|}$ при $x \to 2$ равен $-\infty$». Так как $+\infty$ и $-\infty$ не являются действительными числами, то слово

«равен» применительно к ним употребляется лишь для упрощения речи.

Пишут, что $x \to \infty$ (не ставя знак «+» или «–» перед символом ∞), если известно, что $|x| \to +\infty$. Поэтому можно написать: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x-1} + 2 \right) = 2$. Пишут также, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если известно, что $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.

Поэтому можно написать:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^5 = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$.

ПРИМЕР 6. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

2.1 Дана функция $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$. Заполните таблицу и определите, к какому значению стремятся значения функции при $x \to a$, если: а) $a = +\infty$; б) $a = -\infty$; в) $a = 1$.

а)

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
$y = f(x)$						

б)

x	–1	–10	–100	–1000	–10 000	–100 000
$y = f(x)$						

в)

x	1,1	0,9	1,01	0,99	1,001	0,999
$y = f(x)$						

Чему равны пределы: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right)$, $\lim\limits_{x \to 1} \left(5 + \frac{1}{x} \right)$?

2.2 Объясните, что означает запись:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2$;

б) $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = 9$;

в) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{|x-5|} = +\infty$;

г) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = \infty$.

2.3 Объясните, почему верно равенство:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-1}{(x+1)^2} = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^3} = \infty$; г) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-3}{x+2} = \infty$.

Определите, чему равен предел **(2.4—2.5)**:

2.4 а) $\lim\limits_{x \to 2} x^3$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$; в) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$; г) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2}{x}$.

2.5* а) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^{[x]} \cdot x^3$; б) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-1)^{[x]} \cdot x^3$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2)^{[x]}$; е) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\pi)^{[x]}$.

2.2. Односторонние пределы

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Она определена для всех $x \neq 0$, ее график изображен на рисунке 62.

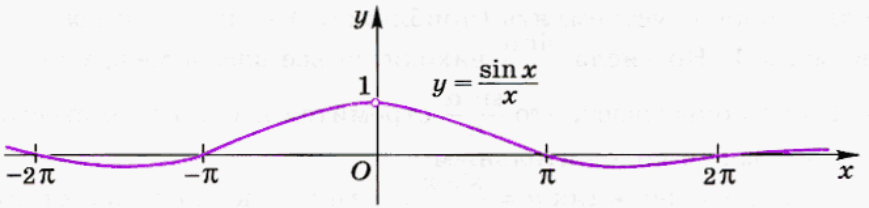


Рис. 62

Посмотрим, как изменяются значения функции при $x \to 0$.

x	0,50	0,10	0,05
$y = \dfrac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Как видно из таблицы, значения функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$ стремятся к 1, когда независимая переменная x стремится к нулю, оставаясь положительной.

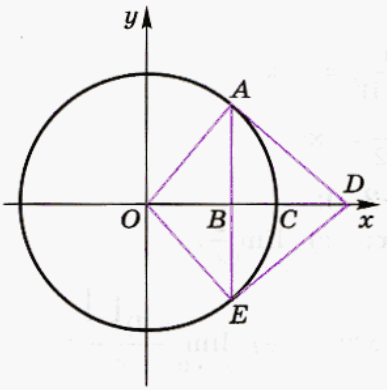


Рис. 63

Этот факт можно получить из геометрических соображений. На рисунке 63 изображена окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy.

Пусть угол AOC равен α радиан, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда длина дуги AC равна α ($\smile AC = \alpha$). Из точки A проведем к окружности касательную. Пусть она пересечет ось Ox в точке D. Опустим из точки A перпендикуляр на ось Ox. Пусть он пересекает ось Ox в точке B, а окружность в точке E. Из треугольников OAB и OAD следует, что $BA = \sin\alpha$, $AD = \operatorname{tg}\alpha$.

Так как длина дуги окружности больше стягиваемой ею хорды и меньше объемлющей ее ломаной, то $2AB < 2(\smile AC) < 2AD$. Поэтому $2\sin\alpha < 2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha$. Так как $\sin\alpha > 0$, то отсюда получаем, что $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$.

Так как все члены в этом двойном неравенстве положительны, то

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

Если теперь α устремлять (приближать) к нулю, то $\cos\alpha$ будет стремиться к 1. Но числа $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ находятся все время между числами $\cos\alpha$ и 1. Это показывает, что $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ стремится к 1, когда α стремится к нулю, оставаясь положительным.

Тот факт, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ стремится к 1, когда x стремится к 0, оставаясь положительным, записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (1)$$

и говорят, что **предел функции $y = \frac{\sin x}{x}$, когда x стремится к нулю, принимая положительные значения, равен 1.**

Но если $x \to 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из равенства (1) посредством замены переменной $x = -u$, в силу которой если $x \to 0$, $x < 0$, то $u \to 0$, $u > 0$ и

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{\sin u}{u} = 1. \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, что предел функции $y = \frac{\sin x}{x}$ равен 1, когда x стремится к нулю, оставаясь отрицательным.

Рассмотрим функцию $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ для таких значений x, что $0 < |x| < 1$. Можно показать, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где e — иррациональное число, приближенно равное 2,71828... .

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой **правой окрестности точки** a, т. е. пусть она определена для каждого x, удовлетворяющего неравенствам $a < x < a + \delta$, при некотором $\delta > 0$. Говорят, что эта функция имеет **правый предел в точке** a, равный A, если из того, что x стремится к a, оставаясь в правой окрестности точки a, следует, что соответствующие значения $f(x)$ стремятся к A. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой **левой окрестности точки** a, т. е. пусть она определена для каждого x, удовлетворяющего неравенствам $a - \delta < x < a$ при некотором $\delta > 0$. Говорят, что эта функция имеет **левый предел в точке** a, равный B, если из того, что x стремится к a, оставаясь в левой окрестности a, следует, что соответствующие значения $f(x)$ стремятся к B. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = B.$$

В этих определениях A и B могут быть или любыми числами, или $+\infty$, или $-\infty$.

Выше найдены правый и левый пределы функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке нуль, оба равные 1, и указаны правый и левый пределы функции $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ в точке нуль, оба равные числу e.

Легко проверить, что существуют правый и левый пределы функции $y = \frac{1}{x^2}$ в точке нуль, оба равные $+\infty$, и что существуют правый и левый пределы функции $y = -\frac{1}{|x|}$ в точке нуль, оба равные $-\infty$.

Отметим еще, что правый и левый пределы функции в точке a могут и не совпадать.

ПРИМЕР 1. У функции $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ правый предел в точке 0 есть 1, а левый предел есть -1.

ПРИМЕР 2. У функции $y = \frac{1}{x}$ правый предел в точке 0 равен $+\infty$, а левый предел равен $-\infty$.

ПРИМЕР 3. У функции $y = \operatorname{tg} x$ левый предел в точке $\frac{\pi}{2}$ равен $+\infty$, а правый предел равен $-\infty$.

Наряду с определением предела функции в точке, приведенным в п. 2.1, можно дать и такое определение:

Если существуют левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке a и оба они равны A, то говорят, что эта функция имеет **предел** в точке a, равный A, и пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой (полной) окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ точки a за исключением, быть может, самой точки a.

ПРИМЕР 4. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ определена для всех значений x за исключением $x = 0$. Выше показано, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$, следовательно, эта функция при $x \to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называют **первым замечательным пределом.**

ПРИМЕР 5. Функция $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ определена для таких x, что $0 < |x| < 1$.

Выше указано, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Таким образом, эта функция имеет предел при $x \to 0$, равный e:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Этот предел называют **вторым замечательным пределом.**

ПРИМЕР 6. Функция $y = 2^x$ определена для всех x. Можно доказать, что для любого x_0 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} 2^x = 2^{x_0}$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} 2^x = 2^{x_0}$.

Таким образом, для любого x_0 эта функция имеет предел при $x \to x_0$ и он равен 2^{x_0}:

$$\lim_{x \to x_0} 2^x = 2^{x_0}.$$

Отметим, что выше (см. пп. 2.1, 2.2) приведено определение предела функции на интуитивном уровне. Ниже приведены два формальных (принятых в математическом анализе) определения предела в случае, когда A — число (определение «на языке $\varepsilon - \delta$» и определение «на языке последовательностей»).

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет **предел** при $x \to a$, равный числу A, если она определена в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a, и если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любого x, такого, что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Используя только что приведенное определение предела «на языке $\varepsilon - \delta$», докажем, что $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

Так как функция $y = 2^x$ определена для всех x, то она определена и в любой окрестности точки $a = 1$. Возьмем произвольное положительное число ε и выберем число $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Очевидно, что $\delta > 0$. Возьмем теперь любое x, такое, что $0 < |x - 1| < \delta$, т. е. любое $x \neq 1$ из промежутка $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Ясно, что

$$2^x < 2^{1+\delta} = 2 \cdot 2^{\delta} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon,$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot 2^{-\log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2 + \varepsilon} > \frac{4 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что $|2^x - 2| < \varepsilon$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$, такое, что $|2^x - 2| < \varepsilon$ для любого x, такого, что $0 < |x - 1| < \delta$. По определению это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

Замечание. В только что рассмотренном примере не объяснено, как было найдено $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Задача нахождения δ по заданному ε, вообще говоря, довольно трудная.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, равный числу A, если она определена в некоторой окрестности точки a, ис-

ключая, быть может, саму точку a, и если для любой последовательности $\{x_n\}$, имеющей предел, равный a, и такой, что $x_n \neq a$ для всех n, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел, равный A.

Используя только что введенное определение, докажем, что функция $y = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. На рисунке 64 изображен график функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$, которая определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в любой окрестности точки $x = 0$ за исключением самой точки $x = 0$. Эта функция не имеет предела при $x \to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k = \dfrac{2}{\pi(2k-1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ стремится к нулю, а соответствующая им последовательность значений функции $y_k = \sin\dfrac{1}{x_k}$ $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ не стремится при $k \to \infty$ ни к какому пределу. ●

Замечание. Наряду с определением предела функции в точке, приведенным в п. 2.1, в этом пункте приведены еще три определения предела функции в точке. Очевидно, что пределы функции в точке, найденные по любому из этих определений, совпадают.

Найдите левый и правый пределы функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если **(2.6—2.8)**:

2.6 а) $f(x) = x^3$, $a = 1$; б) $f(x) = x^{-2}$, $a = \dfrac{1}{2}$;

в) $f(x) = \sin x$, $a = \pi$; г) $f(x) = \cos x$, $a = \dfrac{\pi}{2}$.

2.7 а) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $a = -2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $a = 2$;

в) $f(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^4}$, $a = 1$; г) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$, $a = 0$.

2.8 а) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $a = 0$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = -\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $a = 2\pi$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $a = \dfrac{3\pi}{2}$.

Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, используя понятия левого и правого пределов, если **(2.9—2.10)**:

2.9 а) $f(x) = -x^5$, $a = 0$; б) $f(x) = x^4$, $a = 1$;

в) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $a = \dfrac{\pi}{6}$; г) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $a = \dfrac{\pi}{3}$.

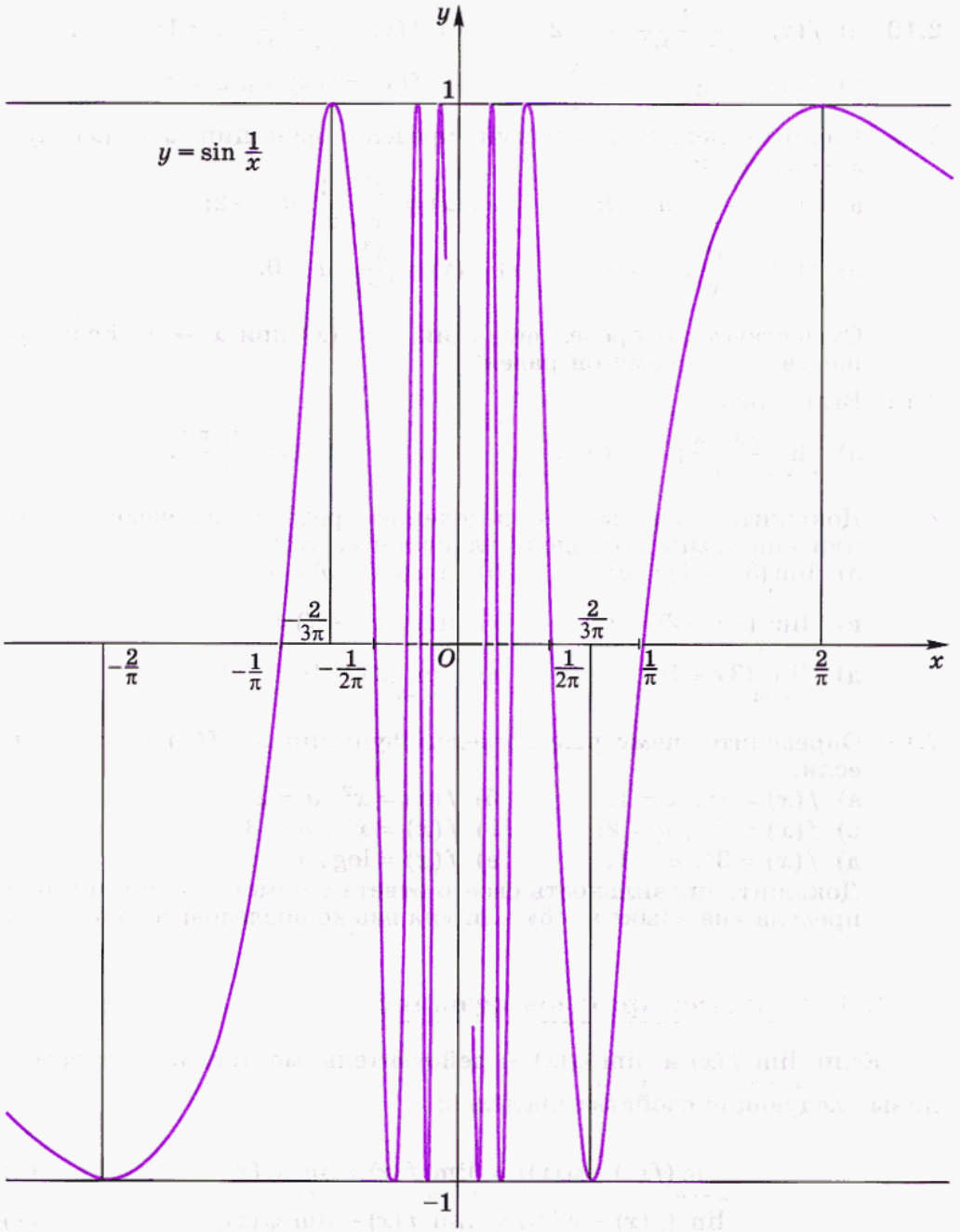

y
1
$y = \sin \frac{1}{x}$
$\frac{2}{3\pi}$
$\frac{2}{3\pi}$
$-\frac{2}{\pi}$
$-\frac{1}{\pi}$
$-\frac{1}{2\pi}$
O
$\frac{1}{2\pi}$
$\frac{1}{\pi}$
$\frac{2}{\pi}$
x
−1

Рис. 64

2.10 а) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $a=2$; б) $f(x)=\dfrac{-1}{|x-1|}$, $a=1$;
в) $f(x)=|\operatorname{tg} x|$, $a=\dfrac{\pi}{2}$; г) $f(x)=|\operatorname{ctg} x|$, $a=\pi$.

2.11 Найдите левый и правый пределы функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если:
а) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, $a=0$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$, $a=-2$;
в) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$, $a=0$; г) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$, $a=0$.

Существует ли предел функции $y=f(x)$ при $x\to a$? Если существует, то чему он равен?

2.12 Вычислите:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin\frac{x}{3}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$.

2.13* Докажите, используя определение предела «на языке $\varepsilon-\delta$» или «на языке последовательностей», что:
а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-7)=5$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-9)=1$;
в) $\lim\limits_{x\to -2}(-x+2)=4$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(-2x+7)=1$;
д) $\lim\limits_{x\to -4}(3x+10)=-2$; е) $\lim\limits_{x\to -5}(2x-1)=-11$.

2.14* Определите, чему равен предел функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если:
а) $f(x)=x^2$, $a=1$; б) $f(x)=x^2$, $a=2$;
в) $f(x)=x^{-1}$, $a=2$; г) $f(x)=x^{-2}$, $a=3$;
д) $f(x)=3^x$, $a=1$; е) $f(x)=\log_3 x$, $a=2$.
Докажите правильность своего ответа с помощью определения предела «на языке $\varepsilon-\delta$» или «на языке последовательностей».

2.3. Свойства пределов функций

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ — действительные числа, то справедливы следующие свойства пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+\varphi(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x); \quad (1)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a}\varphi(x); \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x); \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \tag{4}$$

если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$.

Отметим, что если $f(x)=C$ (постоянная), то

$$\lim_{x\to a} C = C. \tag{5}$$

Замечание. В приведенных равенствах a может быть или числом, или $+\infty$, или $-\infty$, или ∞.

Из свойства (3) следует, что

$$\lim_{x\to a}(f(x))^2 = \lim_{x\to a}(f(x)\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} f(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^2 \tag{6}$$

и

$$\lim_{x\to a}(C\varphi(x)) = C\lim_{x\to a}\varphi(x), \tag{7}$$

где C — постоянная.

Для функции $f(x)$, такой, что $f(x)\neq 0$ в окрестности точки a, справедливы свойства:

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$;

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

ПРИМЕР 1. Если $x_0\in\boldsymbol{R}$ то, применяя свойства (1), (5), (6) и (7), имеем

$$\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c) = \lim_{x\to x_0}(ax^2)+\lim_{x\to x_0}(bx)+\lim_{x\to x_0} c =$$

$$= a\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^2 + b\lim_{x\to x_0} x + c = ax_0^2+bx_0+c.$$

ПРИМЕР 2. Применяя свойства (4), (1) и (7), имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2+\lim\limits_{x\to 2} 4}{\lim\limits_{x\to 2} x+\lim\limits_{x\to 2} 2} = \frac{4+4}{2+2} = 2.$$

В этих примерах, чтобы вычислить предел функции при $x\to a$, где a — число, достаточно подставить в нее a вместо x. В частности, в примере 2 это можно сделать, потому что как числитель, так и знаменатель стремятся к конечным пределам и при этом предел знаменателя не равен нулю.

Приведем примеры вычисления пределов функций, когда отмеченные выше свойства пределов нельзя применить.

ПРИМЕР 3. Найдем $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x-3}$.

Здесь нельзя применить свойство (4), выражающее, что предел частного равен частному пределов, потому что предел знаменателя равен нулю. С другой стороны, можно доказать, что **если числитель дроби стремится к конечному числу, не равному нулю, а знаменатель стремится к нулю, то дробь стремится к бесконечности.** Поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x-3} = \infty$.

ПРИМЕР 4. Найдем $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

В данном случае числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю и соображения, приведенные в примере 3, тоже неприменимы. Но вот как можно поступить. Для любого $x \neq 2$ имеем $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ не принимается во внимание значение функции в точке $x = 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2)$. Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $\dfrac{x^2-4}{x-2}$, достаточно вычислить предел более простой функции $x+2$. Последний при $x \to 2$, очевидно, равен 4, так как $\lim\limits_{x \to 2}(x+2) = \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2+2 = 4$.

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена для всех $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x без исключений. Графики этих функций изображены на рисунках 65 и 66 соответственно. Однако при вычислении предела функции при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определена или не определена эта функция в самой точке $x = 2$, и так как $f(x) = \varphi(x)$ для всех $x \neq 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) = \varphi(2)$.

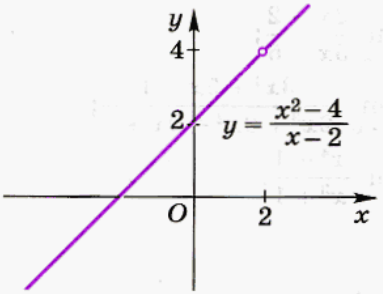


Рис. 65

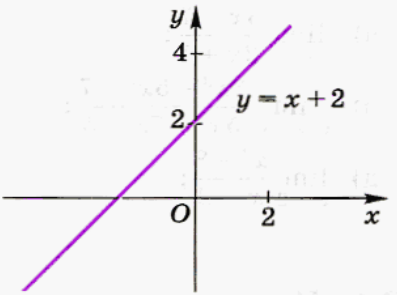


Рис. 66

2.15 Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$; б) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - 2x^2 + x + 1)$;

в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$; г) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sin(x+2)}{x+2}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{3x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2+x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}$.

2.16 Докажите, что:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = 1$.

Вычислите **(2.17—2.19)**:

2.17 а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{7x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{10x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin 5x}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x}$; и) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

2.18 а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{2x}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{4x}\right)^{2x}$.

2.19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7}{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+7}{5x^2+7x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x-1}{2x^3+3x^2+9x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$.

2.4. Понятие непрерывности функции

На рисунке 67 изображен график функции $y=f(x)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.

Зададим произвольную точку (число) x_0, принадлежащую интервалу $(a;\ b)$. Близкая к ней другая точка x может быть записана в виде $x=x_0+\Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое **приращением аргумента** в точке x_0. При этом имеется в виду, что Δx такое, что $x_0+\Delta x\in(a;\ b)$.

Разность $\Delta f=\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называют **приращением функции** f в точке x_0, соответствующим приращению Δx. На рисунке 67 $\Delta x>0$ и Δy равно длине отрезка BC.

Будем устремлять Δx непрерывно к нулю, тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь график функции $y=f(x)$, изображенный на рисунке 68. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно, и поэтому график естественно назвать разрывным. В точке x_0 нам надо как-то определить нашу функцию; условимся, что значение $f(x_0)$ равно длине отрезка, со-

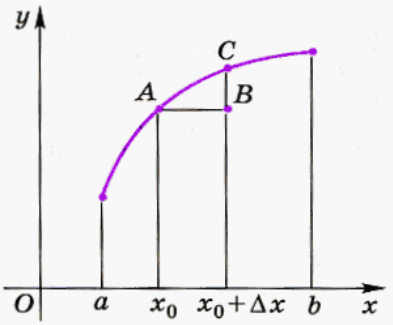


Рис. 67

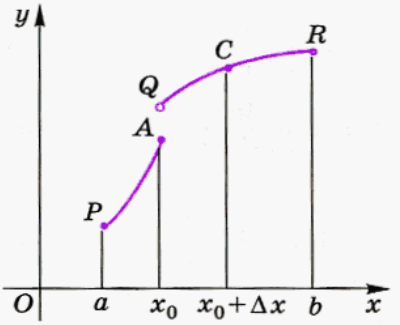


Рис. 68

единяющего точку A и точку x_0 на оси Ox, точка A принадлежит графику, она изображена на рисунке 68 жирной точкой. Точка Q не принадлежит графику, она обведена кружком. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция $y = f(x)$ принимала бы два значения в точке x_0, что противоречит определению функции, приведенному в п. 1.1.

Придадим теперь аргументу x_0 приращение Δx и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если мы будем Δx устремлять непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что Δf будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение Δf при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После рассмотрения этих примеров естественно ввести следующее определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a; b)$, называют **непрерывной в точке** x_0 этого интервала, если приращение функции в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю (здесь имеется в виду Δx, такое, что $(x_0 + \Delta x) \in (a; b)$). Это свойство (непрерывности в точке x_0) записывается в виде (1) или в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (2)$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его. В частности, Δx может пробегать любую стремящуюся к нулю последовательность, члены которой могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Если определенная на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 этого интервала, т. е. в этой точке для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется **разрывной в точке** x_0. Функция, график которой изображен на рисунке 67, непрерывна в любой точке x интервала $(a; b)$, функция же, график которой изображен на рисунке 68, непрерывна в любой точке интервала $(a; b)$, за исключением точки x_0, потому что для последней равенство (2) не выполняется, когда $\Delta x \to 0$, оставаясь положительным.

Из равенства (2) следует, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + (f(x) - f(x_0))) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + 0 = f(x_0),$$

т. е. получилось равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (3)$$

которое может служить другим эквивалентным определением непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0:

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке x_0, если она определена в окрестности этой точки, в том числе и в самой точке x_0, существует предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 и выполняется равенство (3).

Равенство (3) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Функцию, непрерывную в любой точке интервала $(a; b)$, называют **непрерывной** на этом интервале.

Функция, график которой изображен на рисунке 67, непрерывна на интервале $(a; b)$. Функция, график которой изображен на рисунке 68, непрерывна на интервале $(a; x_0)$ и на интервале $(x_0; b)$.

Равенство (3) можно записать еще и так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right). \qquad (4)$$

Приведем пример на применение равенства (4).

Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (5)$$

Сначала преобразуем дробь:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и функция $y = \ln u$ непрерывна в точке $u_0 = e$, то $\lim\limits_{u \to e} \ln u = \ln \lim\limits_{u \to e} u = \ln e = 1$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

В качестве следствия равенства (5) докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Обозначим $e^x - 1 = t$, тогда $e^x = 1 + t$, $t > -1$, $x = \ln(1 + t)$ и $t \to 0$ при $x \to 0$. Применяя равенство (5), имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Приведем теперь определение непрерывности функции в точке «на языке $\varepsilon - \delta$».

Говорят, что функция $y = f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если эта функция определена в окрестности этой точки и в самой точке x_0 и для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для каждого x, такого, что $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Введем понятие непрерывности справа и слева функции в точке.

Говорят, что функция $y = f(x)$ **непрерывна справа в точке** x_0, если она определена в правой окрестности этой точки x_0, в том числе и в самой точке x_0, и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ **непрерывна слева в точке** x_0, если она определена в левой окрестности этой точки x_0, в том числе и в самой точке x_0, и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Функция, график которой изображен на рисунке 67, непрерывна слева в точке b и непрерывна справа в точке a. Функция, график которой изображен на рисунке 68, непрерывна слева в точках x_0 и b, непрерывна справа в точке a (в точке x_0 она не является непрерывной справа).

Функцию называют **непрерывной на отрезке** $[a; b]$, если она непрерывна в любой точке интервала $(a; b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Аналогично определяются функции, непрерывные на полуинтервалах $[a; b)$ и $(a; b]$.

Функция, график которой изображен на рисунке 67, непрерывна на отрезке $[a; b]$. Функция, график которой изображен на рисунке 68, непрерывна на отрезке $[a; x_0]$ и на полуинтервале $(x_0; b]$. ●

График функции, непрерывной на промежутке, есть непрерывная линия. Поэтому определение непрерывности функции на промежутке, которое использовалось нами ранее, не противоречит приведенному в п. 2.4 определению.

2.20° Какую функцию называют непрерывной на промежутке?

2.21 Что называют: а) приращением аргумента; б) приращением функции?

Вычислите приращение Δf функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 и при заданном приращении аргумента Δx **(2.22—2.24)**, если:

2.22 $f(x) = 2x$.
а) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}1$;
в) $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}1$; г) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

2.23 $f(x) = -2x + 1$.
а) $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;
в) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$; г) $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}01$.

2.24 $f(x) = x^2$.
а) $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;
в) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$; г) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

2.25 Найдите приращение Δf функции $y = f(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx, в точке x_0:
а) $f(x) = 2x$; б) $f(x) = -2x + 1$; в) $f(x) = x^2$.
К чему стремится Δf при $\Delta x \to 0$? Зависит ли ответ на этот вопрос от выбора точки x_0?

2.26 Является ли непрерывной на интервале $(-\infty; +\infty)$ функция:
а) $f(x) = C$; б) $f(x) = kx + b$; в) $f(x) = ax^2 + bx + c$?
Ответ обоснуйте.

2.27 Докажите, что в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ непрерывна функция:
а) $y = x^2$; б) $y = x^3$; в) $y = 2x^3 - x^2 + x$.

2.28 Докажите, что в любой точке $x_0 \in (0; +\infty)$ непрерывна функция:
а) $y = \log_2 x$; б) $y = x^{\frac{-3}{2}}$.

2.29 Докажите, что функция $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

2.30 Докажите, что если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывна также функция:
а) $y = f(x) + \varphi(x)$; б) $y = f(x) - \varphi(x)$;
в) $y = f(x) \cdot \varphi(x)$; г) $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии $\varphi(x_0) \neq 0$.

2.31 Докажите непрерывность функции $y = f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \cos x$.

2.32 Укажите промежутки непрерывности функции:
а) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; б) $y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$;
г) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; д) $y = \operatorname{tg} x$; е) $y = \operatorname{ctg} x$.

2.5. Непрерывность элементарных функций

Каждая из рассмотренных ранее основных элементарных функций непрерывна в каждой точке области существования этой функции. Данное свойство означает, в частности, справедливость следующих равенств:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n \ (n \in \boldsymbol{N},\ x_0 \in \boldsymbol{R})$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} x^{-n} = x_0^{-n} \ (n \in \boldsymbol{N},\ x_0 \neq 0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha} \ (\alpha > 0,\ x_0 \geqslant 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} x^{-\alpha} = x_0^{-\alpha} \ (\alpha > 0,\ x_0 > 0)$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x_0 \in \boldsymbol{R})$;

6) $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x_0 > 0)$;

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \ (x_0 \in \boldsymbol{R})$;

8) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \ (x_0 \in \boldsymbol{R})$;

9) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \ \left(x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$;

10) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \ (x_0 \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z})$.

Из приведенного выше утверждения следует также, что каждая из основных элементарных функций непрерывна на каждом промежутке, содержащемся в области существования этой функции. Так, в частности:

а) каждая из функций $y = x^n \ (n \in \boldsymbol{N})$, $y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$;

б) каждая из функций $y = x^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$;

в) функция $y = x^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$;

г) функция $y = x^{-n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

д) функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на каждом из промежутков $\dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi (k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}$;

е) функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на каждом из промежутков $\pi n < x < \pi (n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

При вычислении пределов функции надо учитывать, что если функция $x = \varphi(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(u_0)$, то суперпозиция этих функций, т. е. функция $F(u) = f(\varphi(u))$, непрерывна в точке u_0. Ведь, применяя равенство (4) из п. 2.4, можно записать:

$$\lim_{u \to u_0} F(u) = \lim_{u \to u_0} f(\varphi(u)) = f\left(\lim_{u \to u_0} \varphi(u)\right) =$$
$$= f\left(\varphi\left(\lim_{u \to u_0} u\right)\right) = f(\varphi(u_0)) = F(u_0).$$

ПРИМЕР 1. Функцию $y = \sin x^3$ можно записать как суперпозицию двух непрерывных на $\boldsymbol{R}$ функций $y = \sin u$, $u = x^3$, поэтому она тоже непрерывна для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

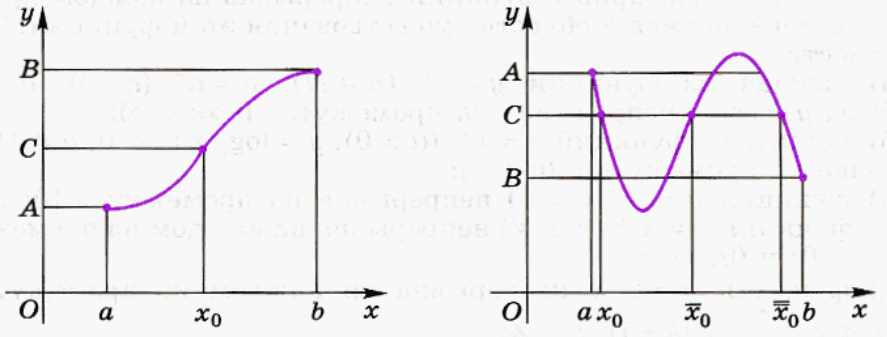
ПРИМЕР 2. Функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$ можно записать как суперпозицию функций $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$. Первая из этих трех функций непрерывна для $u \geqslant 0$, вторая непрерывна для всех v, третья непрерывна для всех x. Это показывает, что исходная функция непрерывна для всех тех x, для которых $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. для всех x, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ●

Сформулируем теорему о промежуточных значениях непрерывной функции.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Тогда для любого числа C, находящегося между числами A и B, найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in (a; b)$, для которой $f(x_0) = C$ (рис. 69, *а*, *б*).

Эту теорему можно сформулировать и так:

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a; b]$.



а) б)

Рис. 69

Доказательство этой теоремы основывается на свойстве непрерывности действительных чисел (см. п. 1.2 учебника 10 класса). Оно выходит за рамки школьной программы и поэтому опускается.

2.33 Определите какой-либо промежуток, на котором непрерывна функция:
а) $y = \sin 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y = x^{-\frac{3}{2}}$; г) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

2.34 Определите все промежутки, на которых непрерывна функция:
а) $y = 2^{\sqrt{\sin x}}$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} x$; в) $y = \log_2(x+1)$.

2.35° а) Сформулируйте теорему о промежуточном значении непрерывной функции.
б) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. На каком основании утверждают, что на интервале $(a; b)$ найдется точка c, такая, что $f(c) = 0$?

2.36 Объясните, почему у функции $y = f(x)$ на указанном отрезке имеется нуль, если:
а) $f(x) = 5x + 2$, $[-1; 2]$; б) $f(x) = x^2 + 6x - 1$, $[0; 1]$;
в) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 1$, $[0; 1]$.

2.37* Докажите, что уравнение $x^5 - 55 = 0$ имеет корень на отрезке $[2; 4]$.

2.38* Докажите, что уравнение $x^3 + 5x^2 - 7x - 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[1; 2]$.

2.6*. Разрывные функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная во всех точках интервала J. Напомним, что эта функция:

1) непрерывна в точке $x_0 \in J$, если в этой точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \qquad (1)$$

2) непрерывна на интервале J, если эта функция непрерывна в каждой точке интервала J;

3) разрывна в точке $x_0 \in J$, если для нее не выполняется условие (1).

ПРИМЕР 1. Функция $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ определена в каждой точке интервала $J = (-\infty; +\infty)$. Она разрывна в точке $x = 0 \in J$, так

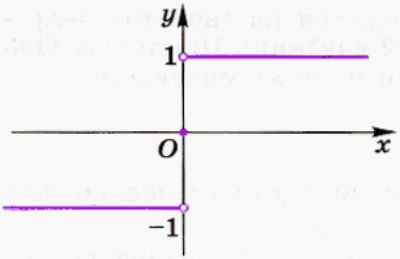


Рис. 70

как в этой точке не выполнено условие (1). График ее приведен на рисунке 70. На нем очевиден разрыв функции в точке $x_0 = 0$.

Разрывные функции описывают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. Например, при ударе скорость тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками.

ПРИМЕР 2. Упругий шарик двигался прямолинейно и равномерно со скоростью v_0. В момент времени t_0 он ударился о стенку и после этого стал двигаться в противоположном направлении с той же скоростью v_0. Можно считать, что скорость в момент t_0 изменилась мгновенно: в момент времени t_0 она еще равнялась v_0, а при $t > t_0$ стала равной $-v_0$. Итак, имеем функцию, определяемую следующим образом:

$$y = v(t) = \begin{cases} v_0, & \text{если } 0 < t \leqslant t_0 \\ -v_0, & \text{если } t > t_0. \end{cases}$$

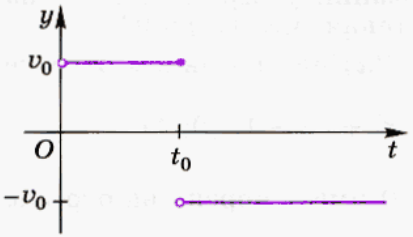


Рис. 71

Эта функция определена в каждой точке интервала $J = (0; +\infty)$. Она разрывна в точке $t = t_0$.

График этой функции приведен на рисунке 71. На нем очевиден разрыв функции в точке $t = t_0$.

ПРИМЕР 3. Функция $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{если } x \neq 1 \\ 3, & \text{если } x = 1 \end{cases}$ определена в каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$. Так как $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, а $y(1) = 3$, то очевидно, что эта функция разрывна в точке $x_0 = 1$. График ее приведен на рисунке 72.

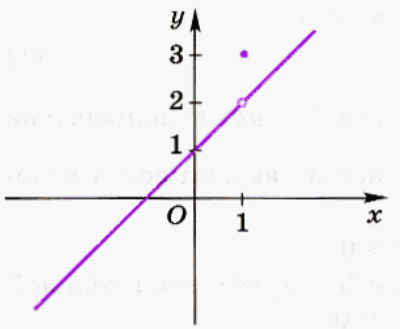


Рис. 72

Отметим, что если видоизменить функцию из примера 3 только в одной точке $x = 1$, положив ее равной числу 2 в этой точке, то получим новую функцию, непрерывную на интервале $(-\infty; +\infty)$:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{если } x \neq 1 \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию, определенную для всех x, за исключением одной точки x_0, т. е. определенную на объединении двух интервалов $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$. Вместо этой функции можно рассмотреть новую функцию, определенную уже в каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$; для этого надо доопределить эту функцию в точке x_0 любым способом.

ПРИМЕР 4. Функция $y = x^0$ определена для всех x, кроме $x = 0$ (рис. 73). Если доопределить эту функцию в точке $x = 0$ следующим образом:

$$y = \begin{cases} x^0, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

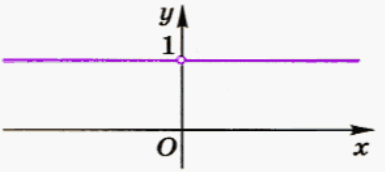


Рис. 73

то полученная функция будет непрерывной на интервале $(-\infty; +\infty)$. Если ее доопределить в точке $x = 0$ другим образом: $y = c$ $(c \neq 1)$ при $x = 0$, то новая функция будет разрывна в точке $x = 0$.

ПРИМЕР 5. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ определена для всех x, кроме $x_0 = 0$. Как бы ее ни доопределили в точке $x_0 = 0$, полученная функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ a, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где a — любое данное число, будет иметь разрыв в точке $x_0 = 0$ (рис. 74).

Рассмотрим функцию, определенную на некотором интервале J, за исключением отдельных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого интервала. Вместо этой функции можно рассмотреть новую функцию, определенную в каждой точке интервала J, для этого надо доопределить эту функцию в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любым способом.

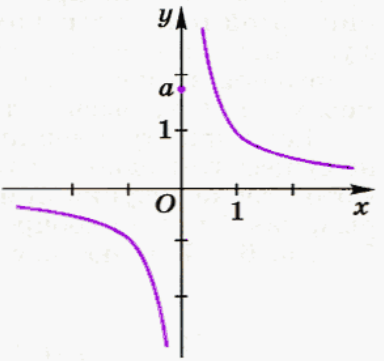


Рис. 74

ПРИМЕР 6. Функция $y = \dfrac{x^2 + 1}{(x + 3)(x - 2)}$ определена для всех x, кроме $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Как бы ее ни доопределяли в точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$, новая функция, определенная в каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$, будет иметь в этих точках разрывы.

ПРИМЕР 7. Зависимость $Q = f(x)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней

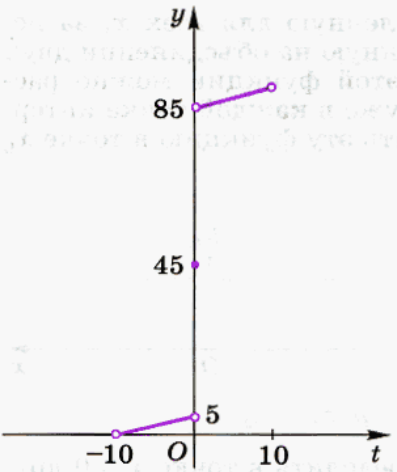


Рис. 75

тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $10°$, выражается следующей формулой:

$$Q = f(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & \text{если } -10 < t < 0 \\ t + 85, & \text{если } 0 < t < 10. \end{cases}$$

При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной. Можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0) = 45$. Функция

$$Q = f(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & \text{если } -10 < t < 0 \\ 45, & \text{если } t = 0 \\ t + 85, & \text{если } 0 < t < 10 \end{cases}$$

определена в каждой точке интервала $(-10; 10)$, она разрывна в точке $t = 0$. График ее приведен на рисунке 75, на нем очевиден разрыв в точке $t_0 = 0$. Как бы мы ни доопределяли функцию в этой точке, новая функция будет иметь в этой точке разрыв.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв и при стремлении x к x_0 справа и слева для функции $y = f(x)$ существует один и тот же предел — число A, то говорят, что разрыв функции в этой точке устраним. Для этого достаточно переопределить эту функцию в точке x_0, положив $f(x_0) = A$. Новая функция будет непрерывной в точке x_0. Такой **разрыв** называют **устранимым**. В примерах 3 и 4 разрывы устранимы.

Если при стремлении x к x_0 справа и слева для функции $y = f(x)$ не существует одного и того же предела — числа A, то говорят, что в этой точке у функции **неустранимый разрыв** (она будет иметь разрыв, как бы ее ни доопределяли в этой точке). Функции в примерах 1, 2, 5, 6 и 7 имеют неустранимые разрывы.

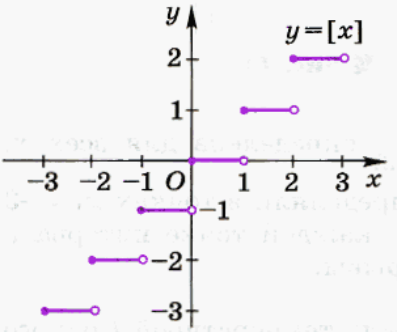


Рис. 76

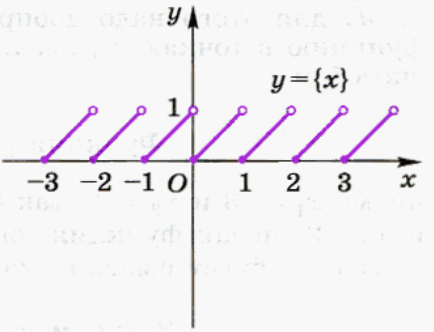


Рис. 77

В заключение приведем примеры функций, имеющих бесконечно много разрывов.

ПРИМЕР 8. Функция $y = [x]$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. В каждой точке $x = n \in \boldsymbol{Z}$ она имеет разрыв (рис. 76).

ПРИМЕР 9. Функция $y = \{x\}$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. В каждой точке $x = n \in \boldsymbol{Z}$ она имеет разрыв (рис. 77).

2.39° Какая функция является:
а) непрерывной в точке x_0 интервала J;
б) непрерывной на интервале J;
в) разрывной в точке x_0 интервала J?

2.40 Имеет ли точки разрыва функция:

а) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{если } x = 0 \ (\alpha \in \boldsymbol{R}); \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ е) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ \alpha, & \text{если } x = 0 \ (\alpha \in \boldsymbol{R}); \end{cases}$

ж) $y = \left| \{x\} - \dfrac{1}{2} \right|$; з) $y = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & \text{если } x \neq \pi n \ (n \in \boldsymbol{Z}) \\ 0, & \text{если } x = \pi n \ (n \in \boldsymbol{Z})? \end{cases}$

2.41 Можно ли доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0 (в точках x_k) так, чтобы новая функция стала непрерывной на интервале $(-\infty; +\infty)$? Если да, то как это сделать?

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$, $x_0 = -2$;

в) $f(x) = \dfrac{12 - x}{x}$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$, $x_0 = 2$;

д) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$, $x_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

е) $f(x) = \sin x \operatorname{ctg} x$, $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_k = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

з) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

§ 3. Обратные функции

3.1. Понятие обратной функции

Пусть тело падает с высоты H м. Тогда, как известно из физики, путь s м, пройденный телом за t с, равен $\frac{g}{2}t^2$, где $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Так как в момент t_0 падения на землю $s = H$, то $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, поэтому закон изменения s задается формулой

$$s = \frac{g}{2}t^2,\ t \in \left[0;\ \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что если известно время движения t, то однозначно находится путь s, пройденный телом за это время.

Если же известен путь s, то однозначно находится и время движения t:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}},\ s \in [0;\ H]. \qquad (2)$$

Таким образом, если s есть функция от t, заданная формулой (1), то t есть функция от s, заданная формулой (2).

Функцию (2) принято называть функцией, **обратной** к функции (1).

Рассмотрим функцию y от x, заданную формулой

$$y = x^2,\ x \in [0;\ 2]. \qquad (3)$$

Когда x непрерывно возрастает от 0 до 2, то y непрерывно возрастает от 0 до 4, пробегая все значения из отрезка [0; 4] (рис. 78). Следовательно, областью изменения функции (1) является отрезок [0; 4].

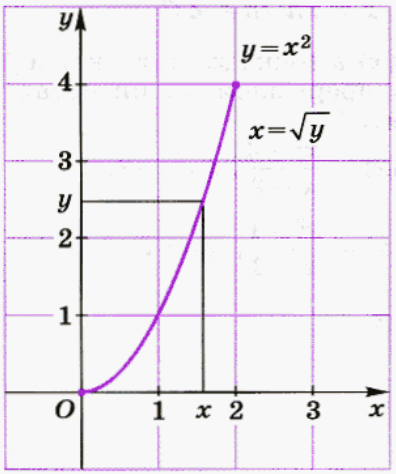


Рис. 78

Функция (3) каждому $x \in [0;\ 2]$ ставит в соответствие единственное $y \in [0;\ 4]$, причем разным x — разные y, и для каждого $y \in [0;\ 4]$ существует единственное $x \in [0;\ 2]$, для которого $y = x^2$. Это означает, что x есть функция от y.

Выразив из формулы (3) x через y для $x \in [0;\ 2]$ и $y \in [0;\ 4]$, найдем эту функцию:

$$x = \sqrt{y},\ y \in [0;\ 4]. \qquad (4)$$

Функцию (4) называют функцией, **обратной** к функции (3). Ясно, что графики функций (3) и (4) совпадают (см. рис. 78).

Теперь рассмотрим функцию

$$y = f(x),\ x \in J, \qquad (5)$$

которая строго монотонна (т. е. возрастает или убывает) и непрерывна на промежутке J и имеет область изменения промежуток J_1.

Проведя рассуждения, аналогичные проведенным выше, получим, что у функции (5) есть обратная к ней функция. Для нахождения этой обратной функции надо из формулы (5) выразить x через y при $x \in J$, $y \in J_1$. Полученная формула

$$x = \varphi(y),\ y \in J_1 \qquad (6)$$

и будет задавать функцию, обратную к функции (5).

Ясно, что графики функций (5) и (6) совпадают.

ПРИМЕР. Найдем функцию, обратную к функции

$$y = x^3,\ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (7)$$

Так как функция (7) непрерывна и возрастает на промежутке $\boldsymbol{R}$ и имеет своей областью изменения промежуток $\boldsymbol{R}$, то она имеет обратную функцию.

Выразив из формулы (7) x через y для $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, получим функцию

$$x = \sqrt[3]{y},\ y \in \boldsymbol{R}, \qquad (8)$$

обратную к функции (7).

Графики функций (7) и (8) совпадают (рис. 79).

У функций, заданных формулами (4), (6), (8), независимой переменной является y, а зависимой x. Поскольку более привычно записывать функции с независимой переменной x и зависимой y, то в формулах (4), (6), (8) можно заменить x на y, y на x. Получится более привычная запись тех же функций:

$$y = \sqrt{x},\ x \in [0;\ 4], \qquad (4')$$

$$y = \varphi(x),\ x \in J_1, \qquad (6')$$

$$y = \sqrt[3]{x},\ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (8')$$

Естественно, что функции, заданные формулами (4′), (6′), (8′), также называют функциями, обратными к функциям (3), (5), (7) соответственно. Часто только их и называют функциями, обратными к функциям (3), (5), (7) соответственно.

Функцию, обратную к данной и записанную в привычном виде, можно найти и другим образом.

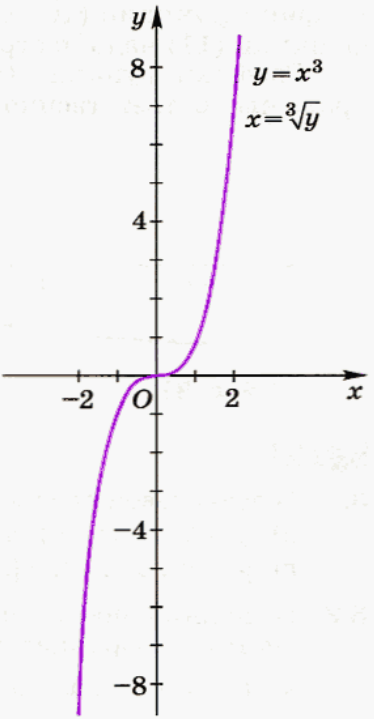


Рис. 79

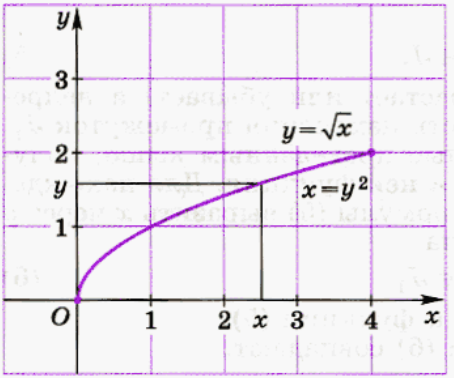


Рис. 80

Пусть функция

$$y = f(x),\ x \in J \qquad (9)$$

строго монотонна и непрерывна на промежутке J и имеет область изменения промежуток J_1. Запишем формулу

$$x = f(y),\ y \in J,\ x \in J_1, \qquad (10)$$

которая получится, если в формуле (9) заменить x на y, а y на x. Выразим теперь из формулы (10) y через x. Полученная формула

$$y = \varphi(x),\ x \in J_1,\ y \in J \qquad (11)$$

и будет задавать функцию, обратную к функции (9) и записанную в привычном виде. Найденная таким способом функция $y = \varphi(x)$, обратная к функции $y = f(x)$, естественно, будет такой же, как и функция $y = \varphi(x)$, найденная первым способом. Но второй способ нахождения функции $y = \varphi(x)$, обратной к функции $y = f(x)$, дает способ построения графика функции $y = \varphi(x)$. Так как очевидно, что графики функций (10) и (11) совпадают, то для построения графика функции (11) надо построить график функции (10).

Графики функций (4′) и (8′), построенные таким образом, изображены соответственно на рисунках 80 и 81.

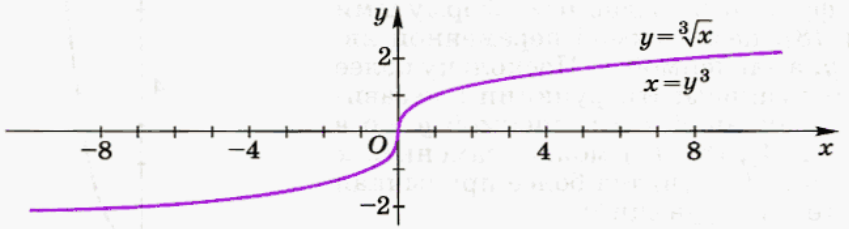


Рис. 81

3.1 В декартовой системе координат xOy постройте график функции:
а) $y = 2x + 1$; б) $y = 2x + 1$, $x \in [-3; 3]$; в) $y = x^2$;
г) $y = x^2$; $x \in (0; 1]$; д) $y = x^3$; е) $y = x^3$, $x \in (-1; 2)$.

3.2 Выполнив построение графиков, убедитесь, что в декартовой системе координат xOy совпадают графики функций:
а) $y = x + 1$ и $x = y - 1$; б) $y = 2x$ и $x = \frac{1}{2}y$;
в) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ и $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$;

г) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ и $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$;

д) $y = x^3$ и $x = \sqrt[3]{y}$; е) $y = 2^x$ и $x = \log_2 y$, $y \in (0; +\infty)$.

3.3 В данной формуле замените x на y, y на x, затем выразите из полученной формулы y через x:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = 2x - 8$;

в) $y = x^2$, $x \in [0; 3]$; г) $y = -x^2$, $x \in [0; 3]$;

д) $y = 8x^3$; е) $y = 0{,}5\sqrt{x}$, $x \in [0; 25]$;

ж) $y = 3^x$; з) $y = \log_5 x$, $x \in (0; 25)$.

3.4 Найдите функцию $x = \varphi(y)$, обратную к данной функции $y = f(x)$, и постройте графики обеих функций в одной системе координат:

а) $y = x^2$, $x \in [-1; 0]$; б) $y = x^3$, $x \in [0; 2]$;

в) $y = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0; +\infty)$; г) $y = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in (-\infty; -2)$;

д) $y = 6x + 5$, $x \in (-\infty; +\infty)$; е) $y = -x + 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.5 В задании 3.4 найдите функцию $y = \varphi(x)$, обратную к данной функции $y = f(x)$, постройте графики обеих функций в одной системе координат.

3.2*. Взаимно обратные функции

Пусть дана функция

$$y = f(x),\ x \in [a; b], \qquad (1)$$

непрерывная и возрастающая на отрезке $[a; b]$. Когда x непрерывно возрастает от a до b, то y непрерывно возрастает от c до d, пробегая все значения из отрезка $[c; d]$, где $c = f(a)$, $d = f(b)$ (рис. 82). Следовательно, областью изменения функции (1) является отрезок $[c; d]$.

Функция (1) каждому $x \in [a; b]$ ставит в соответствие единственное $y \in [c; d]$, причем разным x соответствуют разные y и для каждого $y \in [c; d]$ существует единственное $x \in [a; b]$, для которого $y = f(x)$.

Это означает, что x есть функция от y. Выразив из формулы (1) x через y для $x \in [a; b]$ и $y \in [c; d]$, найдем эту функцию:

$$x = \varphi(y),\ y \in [c; d]. \qquad (2)$$

Функцию (2) называют функцией, **обратной** к функции (1).

Если задать сначала функцию (2) и провести для нее рассуждения, аналогичные только что проведенным, то получим, что функция (1) является функцией, обратной к функции (2). Поэтому функции (1) и (2), т. е. функции f и φ, называют **взаимно обратными функциями**.

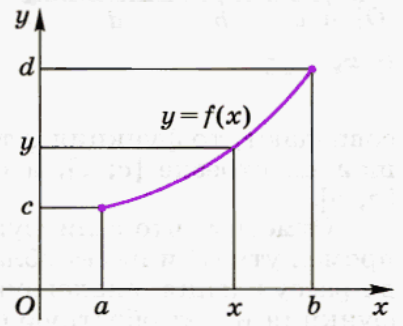


Рис. 82

Из равенств (1) и (2) следуют свойства взаимно обратных функций f и φ:

$$\varphi(f(x)) = x,\ x \in [a;\ b], \tag{3}$$
$$f(\varphi(y)) = y,\ y \in [c;\ d]. \tag{4}$$

Отметим, что функция φ есть закон, по которому значения зависимой переменной определяются по значениям независимой переменной; при этом совершенно неважно, какими буквами обозначены эти переменные. Поэтому функцию φ, обратную к функции f, можно задать как формулой

$$x = \varphi(y),\ y \in [c;\ d], \tag{5}$$

так и формулой

$$y = \varphi(x),\ x \in [c;\ d]. \tag{6}$$

Поскольку более привычно функцию записывать так, чтобы независимая переменная обозначалась буквой x, а зависимая — буквой y, то часто функцию φ, обратную к функции f, задают именно формулой (6).

Однако здесь есть некоторая тонкость. Графики функций определяются геометрическим соглашением: x выражает абсциссу, а y — ординату точки графика. В соответствии с этим соглашением функция φ, записанная в виде (5), имеет график — линию $y = f(x)$, а записанная в виде (6) — другой график — линию $y = \varphi(x)$ (рис. 83).

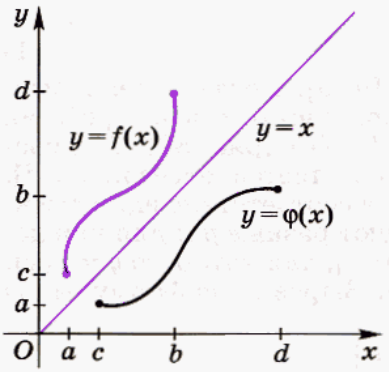


Рис. 83

Очевидно, что формула (6) получается из формулы (5) заменой x на y и y на x, поэтому линия $y = \varphi(x)$ симметрична линии $x = \varphi(y)$ относительно прямой $y = x$. Так как линия $x = \varphi(y)$ совпадает с линией $y = f(x)$, то графики взаимно обратных функций, заданных в привычном виде (y — функция аргумента x), т. е. в виде (1) и (6), симметричны относительно прямой $y = x$. В этом выражается **свойство графиков взаимно обратных функций**.

Так как линии $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ совпадают, то функция φ также является непрерывной и возрастающей на отрезке $[c;\ d]$, а областью ее изменения является отрезок $[a;\ b]$.

Отметим, что если функция непрерывна и строго монотонна на промежутке J и имеет область изменения промежуток J_1, то, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что эта функция имеет обратную функцию с областью определения J_1 и областью изменения J.

Таким образом, **если дана непрерывная функция, то достаточным условием существования обратной к ней функции является строгая монотонность данной функции.** При этом обратная функция также непрерывна.

ПРИМЕР. Найдем функцию, обратную к функции

$$y = x^{\frac{3}{2}},\ x \in [0; +\infty). \qquad (7)$$

Так как функция (7) непрерывна и возрастает на полуинтервале $[0; +\infty)$, то она имеет своей областью изменения полуинтервал $[0; +\infty)$ (рис. 84, *а*), на котором определена обратная к ней непрерывная функция.

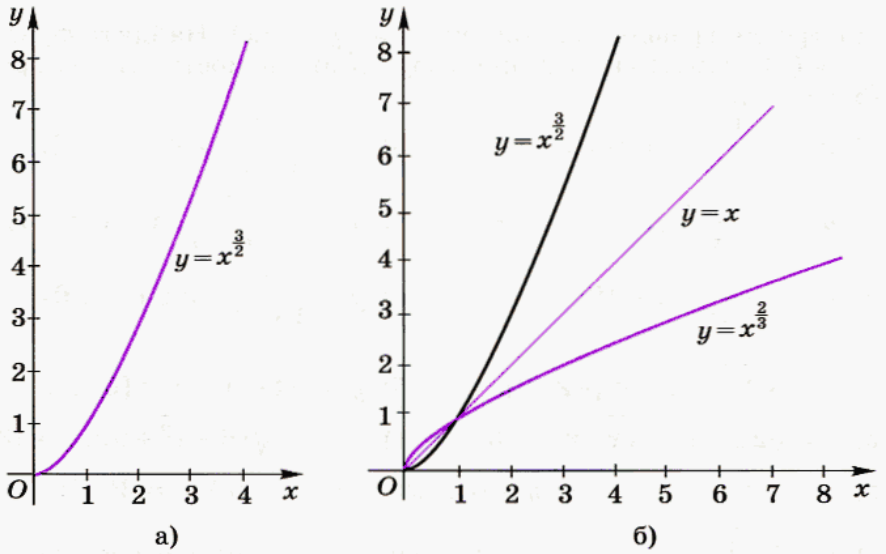
Выразив из формулы (7) x через y для $y \in [0; +\infty)$, $x \in [0; +\infty)$, получим функцию, обратную к функции (7):

$$x = y^{\frac{2}{3}},\ y \in [0; +\infty). \qquad (8)$$

Заменив в формуле (8) x на y, а y на x, получим привычную запись функции, обратной к функции (7):

$$y = x^{\frac{2}{3}},\ x \in [0; +\infty]. \qquad (9)$$

Чтобы построить график функции (9) в декартовой системе координат xOy, можно воспользоваться свойством графиков взаимно обратных функций: сначала построить график функции (7), а затем отразить его относительно прямой $y = x$ — получится график функции (9) (рис. 84, *б*).



а) б)

Рис. 84

Функции $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0; +\infty)$ и $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [0; +\infty)$ — взаимно обратные функции. Приведем еще примеры взаимно обратных функций.

1) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ и $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$;

2) $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ и $y = -\sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$;

3) $y = 3^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ и $y = \log_3 x$, $x \in (0; +\infty)$.

3.6 а) Какие функции называют взаимно обратными? Какими свойствами обладают взаимно обратные функции?
б) Каким свойством обладают графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$?
в) В чем заключается достаточное условие существования функции, обратной к данной непрерывной функции?

3.7 Найдите функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции:
а) $y = x^4$, $x \in [0; +\infty)$;
б) $y = x^4$; $x \in (-\infty; 0]$;
в) $y = x^{2m}$, $x \in (0; +\infty)$, $m \in \boldsymbol{N}$;
г) $y = x^{2m}$, $x \in (-\infty; 0]$, $m \in \boldsymbol{N}$;
д) $y = x^{2m+1}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $m \in \boldsymbol{N}$;
е) $y = a^x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Постройте график данной функции $y = f(x)$. Найдите функцию $y = \varphi(x)$, обратную к данной функции, и постройте ее график **(3.8—3.9)**:

3.8 а) $y = \dfrac{4}{x-2}$, $x \in (2; +\infty)$; б) $y = \dfrac{-4}{x-2}$, $x \in (-\infty; 2)$;

в) $y = 1 - \dfrac{6}{x+2}$, $x \in (-2; +\infty)$; г) $y = 1 + \dfrac{6}{x-4}$, $x \in (-\infty; 4)$;

д) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0; +\infty)$; е) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty; 0]$.

3.9 а) $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2; 0]$; б) $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0; 2]$;

в) $y = \sqrt{21-x^2+4x}$, $x \in [-3; 2]$; г) $y = 4 + \sqrt{16-x^2+6x}$, $x \in [3; 8]$;

д) $y = 8x^3$; е) $y = 0{,}5\sqrt{x}$; ж) $y = 3^{x-1}$;

з) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$; и) $y = \log_5(x+2)$; к) $y = \log_{0,2}(x-1)$.

3.10 Докажите, что угловые коэффициенты взаимно обратных линейных функций $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ ($k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$) связаны соотношением $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$.

3.11 Приведите пример функции, обратной самой себе.

3.12 Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. На каком отрезке задана обратная к ней функция $y = \varphi(x)$, если функция $y = f(x)$:
а) возрастает на отрезке $[a; b]$;
б) убывает на отрезке $[a; b]$?

3.13 Функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$. На каком интервале задана обратная к ней функция $y = \varphi(x)$, если функция $y = f(x)$:
а) возрастает на интервале $(a; b)$;
б) убывает на интервале $(a; b)$?

3.14 На рисунке 85, *а*—*г* дан график функции $y = f(x)$. Постройте в той же системе координат график функции $y = \varphi(x)$, обратной к функции $y = f(x)$.

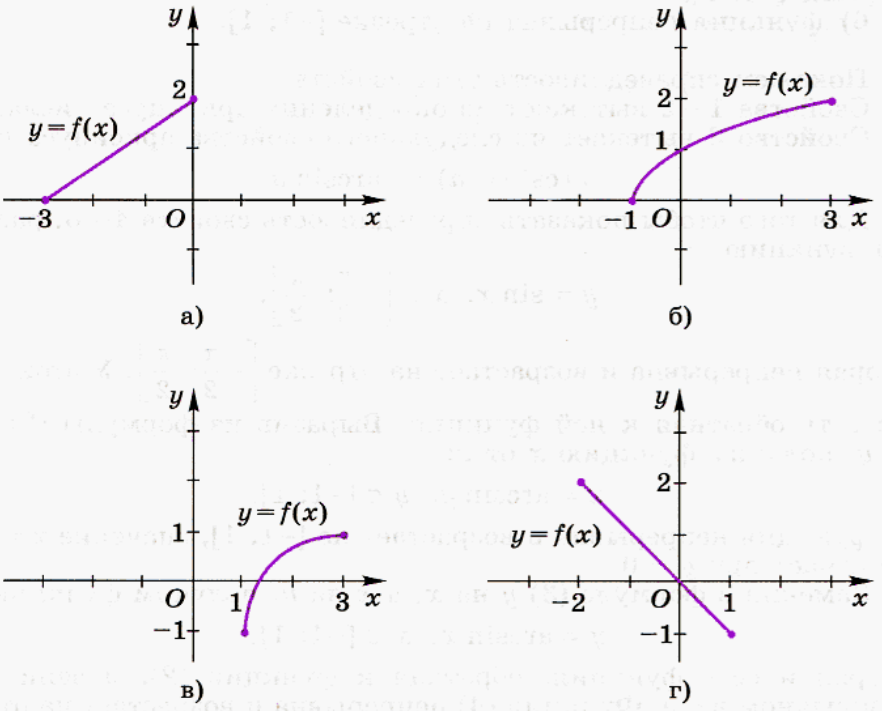


Рис. 85

3.3*. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$. Если каждому числу x из отрезка $[-1; 1]$ поставлено в соответствие число $\arcsin x$, то говорят, что этим определена функция

$$y = \arcsin x. \qquad (1)$$

Областью существования функции (1) является отрезок $[-1; 1]$, а областью изменения — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Перечислим свойства функции (1):

1) функция ограничена;
2) функция принимает наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$ и наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$;
3) функция нечетная;
4) точка $(0; 0)$ — единственная точка пересечения графика функции с осями координат;
5) функция возрастает на всей области существования, т. е. на отрезке $[-1; 1]$;
6) функция непрерывна на отрезке $[-1; 1]$.

Покажем справедливость этих свойств.

Свойства 1—2 вытекают из определения арксинуса числа.

Свойство 3 вытекает из следующего свойства арксинуса числа:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Для того чтобы показать справедливость свойств 4—6, рассмотрим функцию

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad (2)$$

которая непрерывна и возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. У этой функции есть обратная к ней функция. Выразив из формулы (2) x через y, получим функцию x от y:

$$x = \arcsin y, \quad y \in [-1; 1]. \qquad (3)$$

Эта функция непрерывна и возрастает на $[-1; 1]$, значение $x = 0$ она принимает при $y = 0$.

Заменив в формуле (3) y на x, а x на y, получим функцию

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1; 1], \qquad (4)$$

которая и есть функция, обратная к функции (2), и записанная в привычном виде. Функция (4) непрерывна и возрастает на отрезке $[-1; 1)$. Значение $y = 0$ она принимает лишь при $x = 0$.

Для построения графика функции (1) построим в системе координат xOy график функции $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, он и будет графиком функции (1). График функции (1) изображен на рисунке 86.

2. Функция $y = \arccos x$. Если каждому числу x из отрезка $[-1; 1]$ поставлено в соответствие число $\arccos x$, то говорят, что этим определена функция

$$y = \arccos x. \qquad (5)$$

Областью существования функции (5) является отрезок $[-1; 1]$, а областью изменения — отрезок $[0; \pi]$.

Перечислим свойства функции (5):

1) функция ограничена;
2) принимает наибольшее значение $y = \pi$ при $x = -1$ и наименьшее значение $y = 0$ при $x = 1$;
3) функция не является ни четной, ни нечетной;
4) точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(1; 0)$ являются точками пересечения графика функции с осями координат;
5) функция убывает на отрезке $[-1; 1]$;
6) функция непрерывна на отрезке $[-1; 1]$.

Справедливость этих свойств показывается так же, как и для функции $y = \arcsin x$. График функции (5) изображен на рисунке 87.

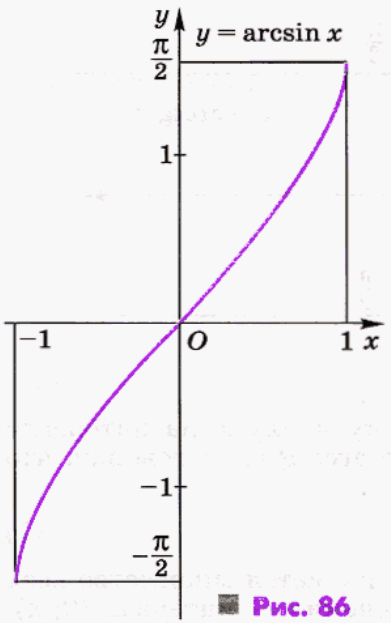


Рис. 86

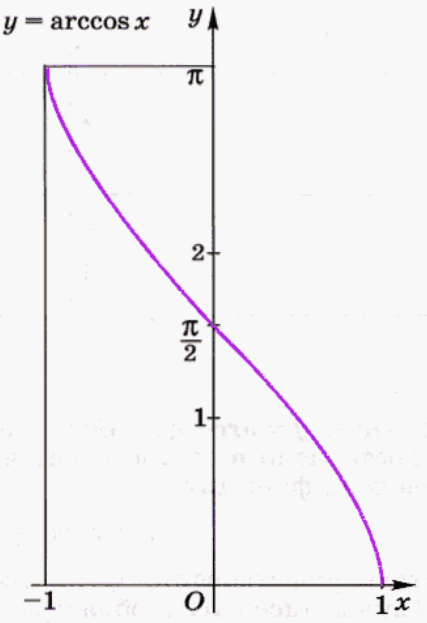


Рис. 87

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$. Если каждому числу x из интервала $(-\infty; +\infty)$ поставлено в соответствие число $\operatorname{arctg} x$, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{arctg} x. \qquad (6)$$

Областью существования функции (6) является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а областью изменения — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Перечислим свойства функции (6):

1) функция ограничена;
2) функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
3) функция нечетная;
4) точка (0; 0) — единственная точка пересечения графика функции с осями координат;
5) функция возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$;
6) функция непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Справедливость этих свойств доказывается аналогично доказательству свойств функции $y = \arcsin x$. Для построения графика функции (6) построим в системе координат xOy график функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, он и будет графиком функции (6).

График функции (6) изображен на рисунке 88.

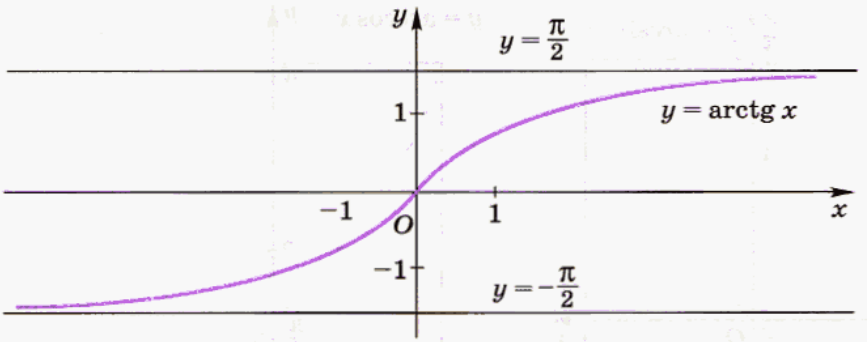


Рис. 88

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$. Если каждому числу x из интервала $(-\infty; +\infty)$ поставлено в соответствие число $\operatorname{arcctg} x$, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{arcctg} x. \qquad (7)$$

Областью существования функции (7) является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а областью изменения — интервал $(0; \pi)$.

Перечислим свойства функции (7):

1) функция ограничена;
2) функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
3) функция не является ни четной, ни нечетной;
4) точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ — единственная точка пересечения графика функции с осями координат;
5) функция убывает на интервале $(-\infty; +\infty)$;
6) функция непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Справедливость этих свойств доказывается аналогично доказательству свойств функции $y = \operatorname{arcsin} x$. Для построения графика функции (7) построим в системе координат xOy график функции $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in (0; \pi)$, он и будет графиком функции (7).

График функции (7) изображен на рисунке 89.

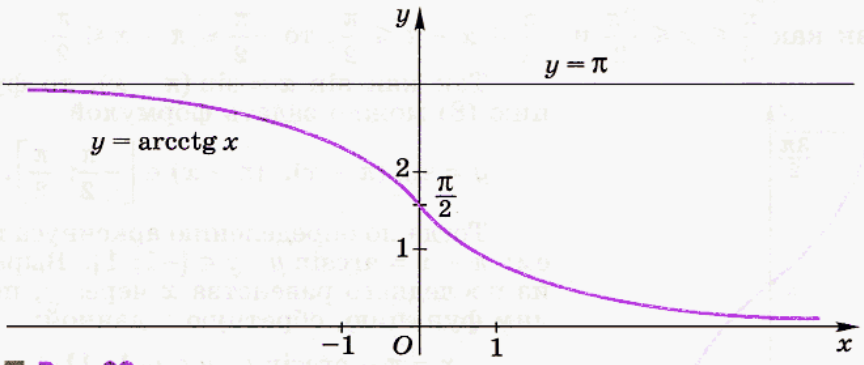


Рис. 89

Каждый из графиков обратных тригонометрических функций можно было построить, пользуясь свойством графиков взаимно обратных функций. Например, для функции $y = \arcsin x$, область значений которой $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, надо рассмотреть обратную к ней функцию

$$y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

построить график этой обратной функции и симметрично отразить его относительно прямой $y = x$ (рис. 90).

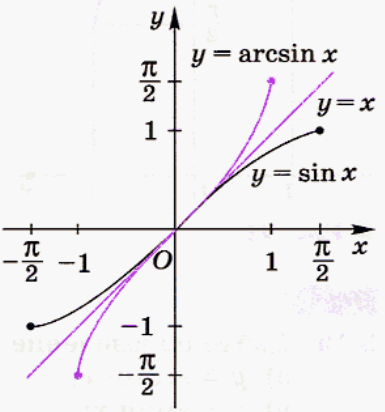


Рис. 90

Аналогично с помощью графиков основных тригонометрических функций строятся и графики остальных обратных тригонометрических функций.

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называют **основными обратными тригонометрическими функциями**. Эти функции также относят к основным элементарным функциям.

Кроме основных обратных тригонометрических функций, можно изучать другие (неосновные) обратные функции.

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию

$$y = \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]. \qquad (8)$$

Эта функция непрерывна и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, ее область изменения — отрезок $[-1; 1]$, следовательно, она имеет обратную к ней функцию.

Так как $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - \pi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

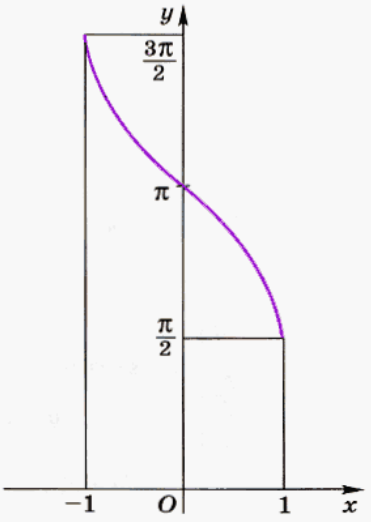


Рис. 91

Так как $\sin x = \sin(\pi - x)$, то функцию (8) можно задать формулой

$$y = \sin(\pi - x), \quad (\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда по определению арксинуса имеем: $\pi - x = \arcsin y$, $y \in [-1; 1]$. Выразив из последнего равенства x через y, получим функцию, обратную к данной:

$$x = \pi - \arcsin y, \quad y \in [-1; 1]. \qquad (9)$$

Заменив в формуле (9) x на y, а y на x, получим функцию y от x:

$$y = \pi - \arcsin x, \quad x \in [-1; 1], \qquad (10)$$

которая и есть функция, обратная к функции (8) и записанная в привычном виде.

График функции (10) изображен на рисунке 91.

3.15 Дайте определение функции:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$;

в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$.

Сформулируйте ее свойства, постройте ее график.

3.16 Найдите функцию $y = \varphi(x)$, обратную к функции:

а) $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \cos x$, $x \in [\pi; 2\pi]$,

и постройте ее график.

3.17 Найдите функцию $y = \varphi(x)$, обратную к функции:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$;

в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$,

и постройте их графики в одной системе координат.

3.4*. Примеры использования обратных тригонометрических функций

1. Для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Найдем синус числа $\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$, пользуясь свойствами синуса:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Итак, число $\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и его синус равен x, поэтому по определению арксинуса

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x,$$

откуда $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

2. а) Для любого $x \in [-1; 1]$ справедливы равенства

$$\sin(\arcsin x) = x, \tag{1}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{2}$$

б) Для любого $x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{3}$$

в) Для любого $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \qquad (4)$$

Действительно, по определению арксинуса числа x ($|x| \leqslant 1$), если $\alpha = \arcsin x$, то $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = x$. Поэтому справедливо равенство (1).

Пусть $\alpha = \arcsin x$. Так как $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha \geqslant 0$, поэтому $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Применяя равенство (1), получаем равенство (2).

Из равенств (1) и (2) следует равенство (3) для $|x| < 1$ и равенство (4) для $0 < |x| \leqslant 1$.

3. Построим графики функций:

$$y = \sin(\arcsin x), \qquad (5)$$
$$y = \cos(\arcsin x), \qquad (6)$$
$$y = \operatorname{tg}(\arcsin x), \qquad (7)$$
$$y = \operatorname{ctg}(\arcsin x). \qquad (8)$$

Прежде всего найдем область определения каждой из этих функций. Так как $\arcsin x$ определен лишь для $|x| \leqslant 1$, то область определения каждой из функций (5) и (6) есть отрезок $[-1; 1]$, область определения функции (7) есть интервал $(-1; 1)$, область определения функции (8) есть объединение двух промежутков $[-1; 0) \cup (0; 1]$. Применяя равенства (1) — (4), функции (5) — (8) можно переписать соответственно в виде

$$y = x, \ |x| \leqslant 1, \qquad (5')$$
$$y = \sqrt{1-x^2}, \ |x| \leqslant 1, \qquad (6')$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1, \qquad (7')$$
$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \ 0 < |x| \leqslant 1. \qquad (8')$$

Поэтому графики этих функций будут иметь вид, как на рисунке 92, *а*—*г*.

Приведем пример вычислений с использованием обратных тригонометрических функций.

ПРИМЕР. Вычислим $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}\right)$.

Обозначим $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$, $\beta = \arcsin\frac{5}{13}$, $\gamma = \arcsin\frac{16}{65}$.

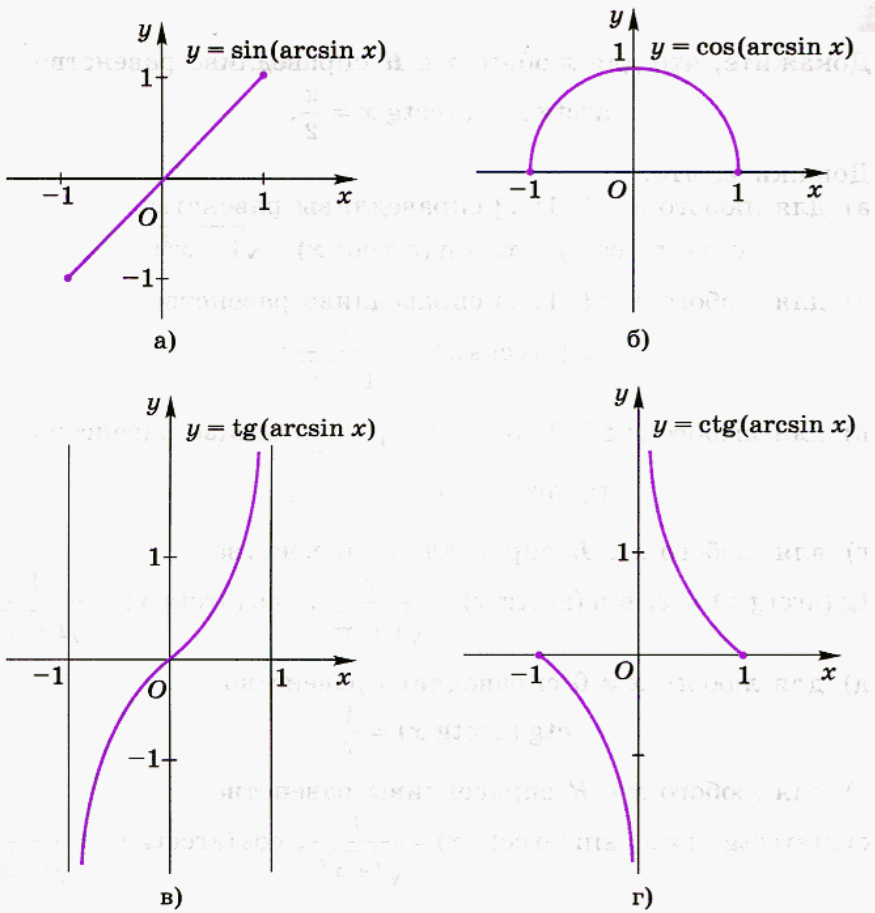


Рис. 92

Каждое из чисел α, β и γ принадлежит промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, и поэтому $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\gamma = \frac{16}{65}$, $\cos\gamma = \frac{63}{65}$.

Тогда

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) - \sin\alpha\sin(\beta+\gamma) =$$
$$= \cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) - \sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) =$$
$$= \frac{3}{5}\left(\frac{12}{13}\cdot\frac{63}{65} - \frac{5}{13}\cdot\frac{16}{65}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{63}{65} + \frac{12}{13}\cdot\frac{16}{65}\right) = 0.$$

3.18 Докажите, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

3.19 Докажите, что:

а) для любого $x \in [-1; 1]$ справедливы равенства

$$\cos(\arccos x) = x, \ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2};$$

б) для любого $x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

в) для любого $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};$$

г) для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливы равенства

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \ \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \ \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

д) для любого $x \neq 0$ справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x};$$

е) для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливы равенства

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \ \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \ \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

ж) для любого $x \neq 0$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}.$$

Постройте график функции (**3.20—3.21**):

3.20* а) $y = \cos(\arccos x)$; б) $y = \sin(\arccos x)$;
в) $y = \operatorname{tg}(\arccos x)$; г) $y = \operatorname{ctg}(\arccos x)$;
д) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; е) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$;
ж) $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$; з) $y = \cos(\operatorname{arctg} x)$;
и) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; к) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$;
л) $y = \sin(\operatorname{arcctg} x)$; м) $y = \cos(\operatorname{arcctg} x)$.

3.21* а) $y = \arcsin(\sin x)$; б) $y = \arcsin(\cos x)$;
в) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$; г) $y = \arcsin(\operatorname{ctg} x)$;
д) $y = \arccos(\cos x)$; е) $y = \arccos(\sin x)$;
ж) $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$; з) $y = \arccos(\operatorname{ctg} x)$;
и) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; к) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$;

л) $y = \operatorname{arctg}(\sin x)$; м) $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$;
н) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$; о) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} x)$;
п) $y = \operatorname{arcctg}(\sin x)$; р) $y = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

3.22 Вычислите:

а) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arccos\frac{3}{5}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{4}{5}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right)$.

§ 4. Производная

4.1. Понятие производной

Рассмотрим три задачи.

ЗАДАЧА 1. Пусть материальная точка движется по прямой по закону

$$s(t) = 4t^2, \qquad (1)$$

где s — путь, пройденный точкой за время t ($t \geqslant 0$). Путь, время и скорость измеряются соответственно в метрах, секундах и в метрах в секунду.

Вычислим сначала среднюю скорость этой точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$. Путь, пройденный точкой за время $t_1 = 2$, равен $s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16$, а путь, пройденный ею за время $t_2 = 5$, равен $s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$, равен $s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84$.

Средняя скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$ равна $v_{ср} = \dfrac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \dfrac{84}{3} = 28$.

Вычислим теперь среднюю скорость $v_{ср}$ этой точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Путь, пройденный точкой за время t, равен $s(t) = 4t^2$, а путь, пройденный ею за время $t + \Delta t$, равен $s(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, равен $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4(t + \Delta t)^2 - 4t^2 = (8t + 4\Delta t)\Delta t$. Средняя скорость точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ равна $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{(8t + 4\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 8t + 4\Delta t$.

Итак, средняя скорость $v_{ср}$ есть сумма двух слагаемых. Первое не зависит от Δt, а второе зависит от Δt, и при этом оно мало для малых Δt.

Таким образом, можно считать, что при малых Δt средняя скорость $v_{ср}$ приближенно равна числу $8t$, т. е. $v_{ср} \approx 8t$.

Число $v = 8t$ есть, очевидно, предел, к которому стремится $v_{ср}$ при $\Delta t \to 0$. Его называют **мгновенной скоростью** точки, движущейся по закону (1), в момент времени t.

В общем случае если точка движется по прямой по закону $s(t) = f(t)$, то ее мгновенной скоростью v в момент времени t называют предел (если он существует), к которому стремится ее средняя скорость на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$ при $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Величину Δt называют **приращением времени**, а величину $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ — **приращением пути**. Другими словами, мгновенной скоростью движущейся точки в момент времени t называют предел (если он существует) отношения приращения пути к приращению времени, когда последнее стремится к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

ЗАДАЧА 2. Пусть кривая Г есть график непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$ (рис. 93 или 94). Зададим на кривой Г точку A, имеющую абсциссу x и ординату y, и точку C, имеющую абсциссу $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$ и соответствующую ординату $y + \Delta y = f(x) + \Delta f$, где $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Секущая S, проходящая через точки A и C, образует с положительным направлением оси Ox угол β (здесь и далее угол между положительным направлением оси Ox и прямой откладывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). На рисунках 93 и 94 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ соответственно.

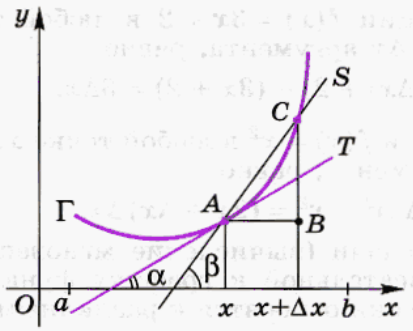
Из рисунков 93 и 94 следует, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Будем устремлять Δx к нулю; тогда вследствие непрерывности функции $y = f(x)$ также будет стремиться к нулю Δy и точка C, двигаясь по кривой Г, будет стремиться к точке A. Если окажется (а этого может и не быть!), что при этом при любом способе стремления Δx к нулю отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к одному и тому же пределу (числу) k:

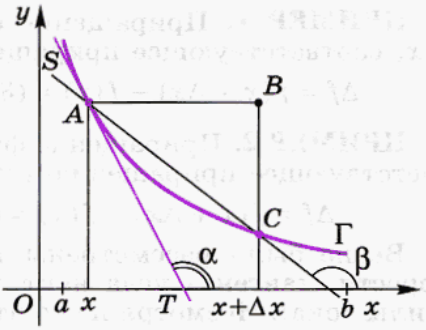
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \ (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому, отличному от $\frac{\pi}{2}$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стре-



$\Delta x = AB, \Delta y = BC$

Рис. 93



$\Delta x = AB, \Delta y = -BC$

Рис. 94

миться занять в пределе положение прямой T, проходящей через точку A под углом α к положительному направлению оси Ox. Но тогда прямая T есть касательная к кривой Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

На рисунках 93 и 94 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ соответственно.

Мы установили, что если при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к конечному пределу, то кривая Γ имеет в точке A касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси Ox равен этому пределу.

ЗАДАЧА 3. Пусть известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна $I_{ср} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент времени t, равную $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x. Выберем в этой окрестности произвольную точку (число), отличающуюся от x на Δx, т. е. точку $x + \Delta x$. Напомним, что число Δx называют **приращением аргумента**, а разность значений функции в точках $x + \Delta x$ и x называют **приращением функции**. Приращение функции $y = f(x)$ в точке x обозначают Δf или Δy:

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

ПРИМЕР 1. Приращение функции $f(x) = 3x + 2$ в любой точке x, соответствующее приращению Δx аргумента, равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (3(x + \Delta x) + 2) - (3x + 2) = 3\Delta x.$$

ПРИМЕР 2. Приращение функции $f(x) = x^2$ в любой точке x, соответствующее приращению Δx аргумента, равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x.$$

Выше были рассмотрены три задачи (вычисление мгновенной скорости, тангенса угла наклона касательной к графику функции и силы тока). Несмотря на то что все они относятся к различным областям знания — механике, геометрии, теории электричества, их решение привело нас к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над функцией: надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Число задач, решение которых приводит к той же операции, можно увеличить. К ним относятся, например, задачи о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Эта операция получила в математике специальное название — **дифференцирование функции**. Результат ее выполнения называют производной.

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в точке x этого интервала, называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Производная функции $f(x)$ при данном x из интервала $(a; b)$ (если она в этой точке x существует) есть число. Если производная функции $f(x)$ существует при каждом значении x из интервала $(a; b)$, то производная есть функция от x, определенная на интервале $(a; b)$.

Производную функции $f(x)$ обозначают $f'(x)$ и говорят: «эф штрих от икс». Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Широко употребляются и другие обозначения производной:

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x).$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ (если он существует) в точке x, когда рассматривается только $\Delta x > 0$ или $\Delta x < 0$, называют соответственно **правой производной и левой производной функции** f в точке x. Про функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$, принято говорить,

что она имеет производную на этом отрезке, если она имеет производную в любой точке интервала $(a; b)$ и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

Найдем производные для некоторых функций $f(x)$, определенных на интервале $(-\infty; +\infty)$.

1. $f(x) = x$. Для любой точки x приращение функции f равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Следовательно, производная функции $f(x) = x$ в любой точке x равна 1, т. е. $x' = 1$.

2. $f(x) = C$. Постоянную можно рассматривать как такую функцию от x, которая равна одному и тому же числу C для любого x из интервала $(-\infty; +\infty)$. Тогда для этой функции приращение функции f равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$. Следовательно, производная функции $f(x) = C$ в любой точке x равна 0, т. е. $C' = 0$.

3. $f(x) = kx + b$, где k и b — данные числа. Для любой точки x приращение функции f равно

$$\Delta f = (k(x + \Delta x) + b) - (kx + b) = k\Delta x.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$. Следовательно, производная функции $f(x) = kx + b$ в любой точке x равна k, т. е. $(kx + b)' = k$. Это означает, что если точка движется по линейному закону $s = kt + b$, то ее мгновенная скорость в любой момент времени t постоянна и равна k: $v = (kt + b)' = k$. В данном случае говорят, что тело движется равномерно со скоростью k, при этом скорость точки и ее мгновенная скорость в любой момент времени t есть одно и то же число k.

4. $f(x) = x^2$. Для любой точки x приращение функции f равно

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Поскольку $2x + \Delta x$ стремится к $2x$ при $\Delta x \to 0$, то $f'(x) = 2x$, т. е. в любой точке x

$$(x^2)' = 2x.$$

5. $f(x) = ax^2 + bx + c$. Для любой точки x приращение функции f равно

$$\Delta f = (a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c) - (ax^2 + bx + c) = (2ax + b + a\Delta x)\Delta x.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x$. Поскольку $2ax + b + a\Delta x$ стремится к $2ax + b$ при $\Delta x \to 0$, то $f'(x) = 2ax + b$, т. е. в любой точке x

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b. \qquad (2)$$

Как следует из рассмотренных в начале данного пункта задач, справедливы следующие утверждения:

1. Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = f(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т. е. $v(t) = f'(t)$.

Этот факт выражает **механический смысл производной**.

2. Если в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$ проведена касательная, то число $f'(x_0)$ есть тангенс угла α между этой касательной и положительным направлением оси Ox, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Этот угол называют **углом наклона касательной**.

Данный факт выражает **геометрический смысл производной**.

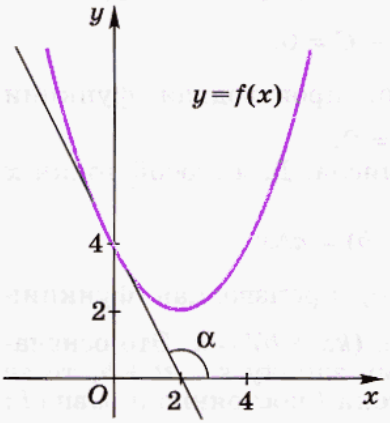


Рис. 95

ПРИМЕР 3. Найдем тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = 0{,}5x^2 - 2x + 4$ в точке с абсциссой $x = 0$.

Найдем производную функции $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4$ в любой точке x, используя равенство (2):

$$(0{,}5x^2 - 2x + 4)' = \\ = 0{,}5 \cdot 2 \cdot x - 2 = x - 2.$$

Вычислим значение этой производной в точке $x = 0$:

$$f'(0) = 0 - 2 = -2.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = -2$. График функции $y = f(x)$ и касательная к ее графику в точке с абсциссой $x = 0$ изображены на рисунке 95.

4.1 Пусть точка движется прямолинейно по закону $s = t^2$. Найдите:
а) приращение времени Δt на промежутке времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 2$;
б) приращение пути Δs на промежутке времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 2$;
в) среднюю скорость на промежутке времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 2$.

4.2 В задании **4.1** найдите:
а) приращение пути Δs на промежутке времени от t до $t + \Delta t$;
б) среднюю скорость на промежутке времени от t до $t + \Delta t$;
в) мгновенную скорость в момент времени t;
г) мгновенную скорость в момент времени $t = 1$.

4.3 Пусть точка движется прямолинейно по закону:
1) $s = 3t + 5$; 2) $s = t^2 - 6t$.
Найдите:
а) приращение пути Δs на промежутке времени от t до $t + \Delta t$;

б) среднюю скорость на промежутке времени от t до $t + \Delta t$;
в) мгновенную скорость в момент времени t.
Для какого из указанных законов мгновенная скорость не зависит от времени и для какого зависит?

4.4 Дана функция $f(x) = x^2$. Проведите секущую через точки графика этой функции с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Найдите:
а) приращение аргумента Δx;
б) приращение функции $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$;
в) тангенс угла наклона секущей $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

4.5 Дана функция $f(x) = x^2$. Проведите секущую через точки графика этой функции с абсциссами x и $x + \Delta x$. Найдите:
а) приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;
б) тангенс угла наклона секущей;
в) тангенс угла наклона касательной в точке с абсциссой x;
г) тангенс угла наклона касательной в точке с абсциссой: $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$; $x = 2$; $x = -2$.

4.6° а) Что называют приращением аргумента; приращением функции; производной функции?
б) Как вычисляют производную функции в точке x?

4.7 Дана функция $f(x) = x^2$.
а) Найдите производную в любой точке $x \in \boldsymbol{R}$.
б) Вычислите значение производной в точке $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$; $x = 2$; $x = -2$; $x = 3$; $x = -3$.
в) При каком значении x производная равна: 0; 1; 3?

4.8 Выполните задание **4.7** для функции:
а) $f(x) = 3x + 8$; б) $f(x) = 8x - 11$;
в) $f(x) = kx + b$; г) $f(x) = x^2 - x + 5$;
д) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; е) $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.9° а) В чем заключается механический смысл производной?
б) В чем заключается геометрический смысл производной?

4.10 Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2 - 4t$.
а) Выразите скорость точки как функцию времени.
б) Вычислите скорость точки в момент времени $t = 5$.
в) В какой момент времени скорость была равна нулю?

4.11 Дана функция $f(x) = x^2 - 6x + 11$.
а) Найдите производную функции.
б) Вычислите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой: $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.
в) При каком значении x тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен: 0; 1; 3?

4.12 Найдите производную функции $y = x^3$.

4.13 На рисунке 96 изображен график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in (-6; 7)$. Определите знак тангенса угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой:

а) -4; б) -3; в) 0;
г) 1; д) 3; е) 6.

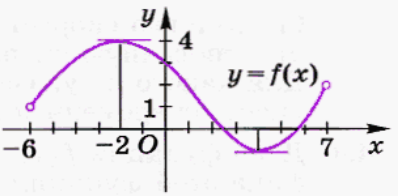


Рис. 96

4.14 В предыдущем задании найдите значения x, при которых:

а) $f'(x) = 0$; б) $f'(x) > 0$; в) $f'(x) < 0$.

4.2. Производная суммы. Производная разности

ТЕОРЕМА 1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их сумма $f(x) = u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, равную

$$f'(x) = u'(x) + v'(x). \qquad (1)$$

Коротко равенство (1) записывают так:

$$(u + v)' = u' + v',$$

и говорят: производная суммы равна сумме производных.

Доказательство. Придадим данному x приращение $\Delta x \neq 0$. Ему соответствует приращение функции f в точке x:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) =$$
$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Учитывая, что по условию функции u и v имеют в точке x производную, имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$. Переходя в равенстве (2) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Равенство (1) доказано.

ПРИМЕР 1. $(x^2 + 3)' = (x^2)' + (3)' = 2x + 0 = 2x$.

ТЕОРЕМА 2. **Если функция $u(x)$ имеет в точке x производную и A — данное число, то функция $f(x) = A \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, равную**

$$f'(x) = A \cdot u'(x). \qquad (3)$$

Коротко равенство (3) записывают так:

$$(A \cdot u)' = A \cdot u',$$

и говорят, что постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Доказательство. Придадим данному x приращение $\Delta x \neq 0$. Ему соответствует приращение функции f в точке x:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = Au(x + \Delta x) - Au(x) = A(u(x + \Delta x) - u(x)) = A\Delta u.$$

Поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x} = A\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $f'(x) = (Au(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(A\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = A\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = Au'(x)$.

Равенство (3) доказано.

ПРИМЕР 2. $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5(2x) = 10x$.

Из теорем 1 и 2 следует справедливость следующего утверждения. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их разность $f(x) = u(x) - v(x)$ также имеет в этой точке производную, равную

$$f'(x) = u'(x) - v'(x). \qquad (4)$$

Коротко равенство (4) записывают так:

$$(u - v)' = u' - v',$$

и говорят: производная разности равна разности производных.

В самом деле,

$$f'(x) = (u - v)' = (u + (-1) \cdot v)' = u' + ((-1) \cdot v)' = u' + (-1) \cdot v' = u' - v'.$$

ПРИМЕР 3. $(5x^2 - 3x)' = (5x^2)' - (3x)' = 5(x^2)' - 3(x)' = 10x - 3$.

ТЕОРЕМА 3. **Если каждая из функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ имеет в точке x производную и A_1, A_2, ..., A_n — данные числа, то справедливо равенство**

$$(A_1u_1 + A_2u_2 + ... + A_nu_n)' = A_1u_1' + A_2u_2' + ... + A_nu_n'.$$

Для $n = 1$ и $n = 2$ теорема 3 является следствием теорем 1 и 2, для любого n она доказывается методом математической индукции.

ПРИМЕР 4.

$$(2x^2 + 3x - 4)' = 2(x^2)' + 3(x)' - 4' = 2 \cdot 2x + 3 - 0 = 4x + 3.$$

Обычно эти вычисления записывают короче: $(2x^2 + 3x - 4)' = 4x + 3$.

4.15 Сформулируйте теорему о производной:
а) суммы двух функций;
б) функции $f(x) = Au(x)$, где A — данное число.

4.16* Докажите теорему 3.

4.17 Найдите производную функции в любой точке $x \in \boldsymbol{R}$:
а) $y = x^2 + x$; б) $y = x^2 - x$; в) $y = x^2 + 14$;
г) $y = x^2 - 15$; д) $y = 5x^2$; е) $y = -x^2$;
ж) $y = 5x^2 + 3x$; з) $y = 3x^2 - 3x + 1$; и) $y = ax^2 + bx + c$.

Найдите производную функции в любой точке $x \in \boldsymbol{R}$, используя задание **4.12 (4.18—4.19)**:

4.18 а) $y = x^3 + x^2 + x$; б) $y = x^3 - x^2 - x$;
в) $y = 5x^3$; г) $y = -x^3$;
д) $y = 2x^3 - 3x^2 + x$; е) $y = 3x^3 - 4x + 2$;
ж) $y = -x^3 + 5x^2 - 8x + 13$; з) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

4.19 а) $y = (x + 3)^2$; б) $y = (x - 4)^2$;
в) $y = (3x + 1)^2$; г) $y = (x + 1)^3$;
д) $y = (x - 2)^3$; е) $y = (2x + 3)^3$.

4.20 Вычислите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:
а) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$, $x_0 = 0$;
б) $f(x) = -5x^3 + 7x^2 + x$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = -x^3 + 4x + 5$, $x_0 = -1$;
г) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 3$, $x_0 = -2$.

4.21 Определите, при каких значениях x производная функции:
а) $y = x^2 + 6x + 5$; б) $y = x^3 + 3x^2 - 17$;
в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 15$; г) $y = x^3 + 5x^2 - 13x + 7$
равна нулю; положительна; отрицательна.

4.22* Найдите функцию $y = f(x)$, для которой:
а) $f'(x) = 6x$; б) $f'(x) = x^2 - 1$;
в) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$; г) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 7$.

4.3*. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал

ТЕОРЕМА. Если функция имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то для нее при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к конечному числу $f'(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Но тогда приращение функции Δy можно записать в виде суммы

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

двух слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке x.

Теорема доказана.

Обратное утверждение не всегда верно. Если функция непрерывна в точке x, то она может не иметь производной в этой точке. Например, функция $y = |x|$ (рис. 97) непрерывна для всех x, но в точке $x = 0$ она не имеет производной.

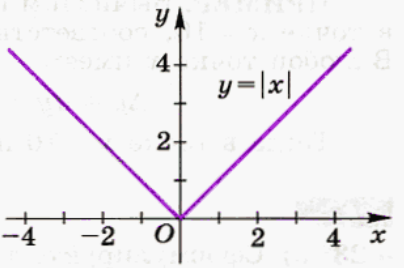


Рис. 97

В самом деле, в этой точке имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, если $\Delta x > 0$, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, если $\Delta x < 0$. Это означает, что в точке $x = 0$ не существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при любом стремлении Δx к нулю, т. е. в точке $x = 0$ функция не имеет производной.

Первое слагаемое в правой части равенства (1) называют **дифференциалом функции** $f(x)$ в точке x, соответствующим приращению Δx аргумента x. Дифференциал функции $f(x)$ обозначают df или dy:

$$df = dy = f'(x)\Delta x.$$

Так как $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, то обычно обозначение приращения аргумента Δx заменяют на dx ($\Delta x = dx$), называемый **дифференциалом аргумента**, и пишут:

$$dy = f'(x)\,dx \text{ или } df = f'(x)\,dx.$$

Следовательно, производную функции можно записать как отношение дифференциалов:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Если $f'(x) \neq 0$, то говорят, что dy и dx имеют один и тот же порядок.

Другое дело — второе слагаемое в правой части равенства (1). При $dx \to 0$ оно стремится к нулю быстрее dx, потому что $\alpha(dx)$, в свою очередь, стремится к нулю при $dx \to 0$. Поэтому величину $\alpha(dx)\,dx$ называют бесконечно малой высшего порядка, чем dx, при $dx = \Delta x \to 0$.

Итак, если функция $f(x)$ имеет в точке x производную, то ее приращение в этой точке равно сумме дифференциала этой функции и величины, представляющей собой бесконечно малую высшего порядка, чем dx:

$$\Delta y = dy + \alpha(dx)\,dx.$$

Это дает основание считать, что при малых Δx приращение Δy приближенно равно дифференциалу dy:

$$\Delta y \approx dy, \text{ т. е. } \Delta y \approx f'(x)\,dx.$$

ПРИМЕР. Вычислим приближенно приращение функции $y = x^2$ в точке $x = 10$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = 0{,}1$. В любой точке x имеем

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x\Delta x.$$

Тогда в точке $x = 10$ получим $\Delta y \approx 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2$.

4.23° а) Сформулируйте теорему о непрерывности функции, имеющей производную в точке x.
б) Верно ли обратное утверждение?

4.24 Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$; б) $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$;

в) $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$; г) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$.

4.25 Для каждой функции в задании **4.24** ответьте на вопрос:
а) Является ли данная функция непрерывной в каждой точке полной области определения?
б) В каждой ли точке функция имеет производную?
в) Если нет, то в какой точке производная не существует?
г) При каких значениях x производная равна нулю; положительна; отрицательна?

4.26 Найдите дифференциал функции:

а) $y = 3x + 5$; б) $y = x^2 + 2x + 4$; в) $y = x^3 - 5x + 11$.

4.27 Вычислите приближенно приращение Δy функции $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ в точке x, если:
а) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $x = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;
в) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}01$; г) $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$.

4.4. Производная произведения. Производная частного

ТЕОРЕМА 1. **Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их произведение $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, равную**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \qquad (1)$$

Коротко равенство (1) записывают так:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Доказательство. В точке x зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ и вычислим приращения функций Δu и Δv:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x), \quad \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x),$$

откуда

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u, \quad v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

Теперь вычислим приращение функции Δf:

$$\begin{aligned} \Delta f &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v. \end{aligned}$$

Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + u(x) \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$.

При $\Delta x \to 0$ имеем $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x)$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x)$, $\Delta v \to 0$, так как функция $v(x)$ в точке x имеет производную, поэтому она в этой точке непрерывна (см. п. 4.3). Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot 0)$, следовательно, в точке x $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Теорема 1 доказана. ●

ПРИМЕР 1.

$$(x \cdot (x^3 - 1))' = x' \cdot (x^3 - 1) + x \cdot (x^3 - 1)' = 1 \cdot (x^3 - 1) + x \cdot 3x^2 = 4x^3 - 1.$$

ТЕОРЕМА 2. **Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x и $v(x) \neq 0$, то их частное $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, равную**

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Коротко это равенство записывают так:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство. В точке x зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ и вычислим приращение функции Δf:

$$\Delta f = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{u(x)\cdot v(x) + \Delta u \cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot \Delta v}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)}\cdot \Delta x.$$

Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)}$.

При $\Delta x \to 0$ имеем $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x)$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x)$, $\Delta v \to 0$, так как функция $v(x)$ в точке x имеет производную, следовательно, она в этой точке непрерывна (см. п. 4.3). Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$, поэтому в точке x

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема 2 доказана. ●

ПРИМЕР 2.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

4.28° Сформулируйте теорему о производной произведения двух функций.

4.29 Из теоремы о производной произведения выведите правило вычисления производной функции $y = Cf(x)$, где C — константа.

В любой точке $x \in \boldsymbol{R}$ найдите производную функции **(4.30—4.31)**:

4.30 а) $y = (x^2 + 3x)(x - 1)$; б) $y = (x^2 - 8x)(x - 2)$;
в) $y = (5x^2 - 3x + 2)(3x + 2)$; г) $y = (5x^2 + 3x + 2)(3x - 2)$;
д) $y = (-x^2 + 2)(3x^2 + 2x)$; е) $y = (4x^2 + 6x - 1)(x^2 - 3)$.

4.31 а) $y = x^4$; б) $y = x^5$; в) $y = x^6$; г) $y = x^7$.

Указание. Представьте данную функцию в виде произведения двух функций.
Например, $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$.

4.32° Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.

4.33 Найдите производную функции в любой точке x ее области определения:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \frac{1}{x+1}$;

г) $y = \frac{x+1}{x-1}$; д) $y = \frac{x}{x^2+1}$; е) $y = \frac{4-x^2}{x}$;

ж) $y = \frac{x^2+3x}{x+1}$; з) $y = \frac{x^2+x-7}{x^2+1}$; и) $y = \frac{-x^2+7x-8}{x^2-7x+5}$.

4.34 Вычислите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке x_0, если:

а) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \frac{-2x}{x^2+2}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$, $x_0 = -1$; г) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $x_0 = -2$.

4.35* Дана функция $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$. Найдите все значения аргумента, при которых:

а) $f'(x) = 0$; б) $f'(x) > 0$; в) $f'(x) < 0$.

4.36* Вычислите значение производной функции $y = (x+1)^{10}$ в точке $x_0 = 0$.

4.5. Производные элементарных функций

ТЕОРЕМА 1. Для любого $x \in R$ и любого натурального $n \geqslant 2$ справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Доказательство. Для $n = 2$ формула (1) уже доказана (см. п. 4.1): $(x^2)' = 2x$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального $n = k$:

$$(x^k)' = kx^{k-1}. \qquad (2)$$

Тогда, применяя формулу для производной произведения двух функций (см. п. 4.4), имеем $(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = (kx^{k-1}) \cdot x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k = (k+1)x^k$, откуда на основании принципа математической индукции заключаем, что формула (1) справедлива для любого натурального $n \geqslant 2$.

Теорема 1 доказана. ●

ПРИМЕР 1. $(x^{20})' = 20x^{19}$.

ТЕОРЕМА 2. **Для любого $x \in R$, кроме $x = 0$, и любого натурального n справедлива формула**

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой производной частного функций и теоремой 1:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{x^{2n}} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Теорема 2 доказана. ●

ПРИМЕР 2. $(x^{-20})' = -20 \cdot x^{-21}$.

ТЕОРЕМА 3. **Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда для любого $x \in R$ справедлива формула**

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности, $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. В точке x зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ и вычислим приращение функции $f(x) = a^x$:

$$\Delta f = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x(e^{\Delta x \cdot \ln a} - 1) =$$
$$= a^x \cdot \frac{e^{\Delta x \cdot \ln a} - 1}{\Delta x \cdot \ln a} \cdot \Delta x \cdot \ln a = a^x \cdot \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \Delta x \cdot \ln a,$$

где $\alpha = \ln a \cdot \Delta x$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \cdot \dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \ln a$.

Очевидно, что $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и, как показано в п. 2.4, $\dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \to 1$. Поэтому для любого x имеем

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Теорема 3 доказана. ●

ПРИМЕР 3. $(20^x)' = 20^x \ln 20$.

ТЕОРЕМА 4. **Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда для любого $x > 0$ справедлива формула**

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. В точке $x > 0$ зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ $(x + \Delta x > 0)$ и вычислим приращение функции $f(x) = \log_a x$:

$$\Delta f = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пусть $t = \frac{\Delta x}{x}$, тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x \ln a} \cdot \ln (1 + t)^{\frac{1}{t}}$.

Очевидно, что $t \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\ln (1 + t)^{\frac{1}{t}} \to 1$ (см. п. 2.4). Поэтому для любого $x > 0$ имеем

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Теорема 4 доказана. ●

Формулу $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ иногда записывают так:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}.$$

ПРИМЕР 4. $(\lg x)' = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $x \in R$ справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (3)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем формулу (3). В точке x зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ и вычислим приращение функции $f(x) = \sin x$:

$$\Delta f = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ имеем $\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \to 1$ (см. п. 2.2), и так как $\cos x$ — непрерывная функция, то $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \cos x$. Поэтому $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \cos x$.

Формула (3) доказана. Формула (4) доказывается аналогично. Теорема 5 доказана. ●

ТЕОРЕМА 6. Для любого $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, справедлива формула

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (5)$$

Для любого $x \neq \pi k$, $k \in Z$, справедлива формула

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (6)$$

Доказательство. Докажем формулу (5), пользуясь теоремой о производной частного и формулами (3) и (4):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формула (5) доказана. Формула (6) доказывается аналогично. Теорема 6 доказана. ●

Таблица производных элементарных функций приведена в приложении 1.

4.37 Запишите формулу для нахождения производной функции: а) $y = x^n$, $n \in N$; б) $y = x^{-n}$, $n \in N$. При каких значениях x справедлива эта формула?

Для любого $x \in R$ найдите производную функции (4.38—4.39):

4.38 а) $y = x^{11}$; б) $y = x^{101}$; в) $y = x^{1001}$.

4.39 а) $y = 7x^4 - 5x^3 - x + 25$; б) $y = -x^4 + 8x^2 + 2x - 19$; в) $y = x^{12} - 5x^8 + 6x^4 - 1$; г) $y = 12x^5 - 20x^3 - 30x^2$.

Для любого $x \neq 0$ найдите производную функции (4.40—4.41):

4.40 а) $y = x^{-21}$; б) $y = x^{-201}$; в) $y = x^{-2001}$.

4.41 а) $y = \frac{1}{x^{21}}$; б) $y = \frac{2}{x^{25}}$; в) $y = -\frac{5}{x^{20}}$.

4.42 Запишите формулу для нахождения производной функции:
а) $y = a^x$; б) $y = e^x$; в) $y = \log_a x$; г) $y = \ln x$.
При каких значениях x справедлива каждая из формул?

Укажите, при каких значениях x функция $f(x)$ имеет производную, и найдите эту производную, если **(4.43—4.45)**:

4.43 а) $f(x) = 11^x$; б) $f(x) = 10^x$;
в) $f(x) = 4^x + 8^x - 16^x$; г) $f(x) = 3^x + 9^x - 27^x$.

4.44 а) $f(x) = \frac{4^x}{2^x}$; б) $f(x) = \frac{3^x}{9^x}$; в) $f(x) = \frac{2^x + 4^x}{2^x}$;
г) $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 9^x}$; д) $f(x) = \frac{2^x - 4^x}{2^x + 4^x}$; е) $f(x) = \frac{3^x - 9^x}{3^x + 9^x}$;
ж) $f(x) = \frac{\lg x}{\lg e}$; з) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$; и) $f(x) = \frac{\lg x}{\lg 2}$.

4.45 а) $f(x) = \log_2 x$; б) $f(x) = \lg x$;
в) $f(x) = 4\log_2 x + 3\ln x - 2\lg x$;
г) $f(x) = 5\log_3 x - 6\ln x + 7\lg x$.

4.46 Запишите формулу для нахождения производной функции:
а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.
При каких значениях x справедлива каждая из формул?

4.47* Докажите формулы для нахождения производных функций $y = \cos x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Укажите, при каких значениях x функция $f(x)$ имеет производную, и найдите эту производную, если **(4.48—4.49)**:

4.48 а) $f(x) = x^{12} + 12^x$; б) $f(x) = x^{20} - 3\sin x$;
в) $f(x) = \ln x - \cos x$; г) $f(x) = \log_4 x + x^{-2}$;
д) $f(x) = x^{12} \cdot 12^x$; е) $f(x) = x^{25} \cdot 4\cos x$.

4.49* а) $f(x) = \cos 2002x \cos 2001x + \sin 2001x \sin 2002x$;
б) $f(x) = \sin 2002x \cos 2001x - \sin 2001x \cos 2002x$;
в) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2002x - \operatorname{tg} 2001x}{1 + \operatorname{tg} 2002x \operatorname{tg} 2001x}$.

4.50 Найдите значения x, при которых производная функции $y = \frac{\ln x}{x}$:
а) равна нулю; б) положительна; в) отрицательна.

4.51* Докажите справедливость равенства:
а) $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$; б) $(5^{2x})' = 5^{2x} \cdot \ln 25$;
в) $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$; г) $(\ln 17x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

4.6. Производная сложной функции

ТЕОРЕМА 1. **Пусть сложная функция $y = f(x) = \varphi(\psi(x))$ такова, что функция $y = \varphi(u)$ определена на промежутке U, а функция $u = \psi(x)$ определена на промежутке X и множество всех ее значений входит в промежуток U. Пусть функция $u = \psi(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка X, а функция $y = \varphi(u)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка U. Тогда функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка X, вычисляемую по формуле**

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (1)$$

Формулу (1) читают так: производная y по x равна производной y по u, умноженной на производную u по x.

Формулу (1) записывают еще так:

$$f'(x) = \varphi'(u) \cdot \psi'(x), \text{ где } u = \psi(x).$$

Доказательство. В точке $x \in X$ зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$, $(x + \Delta x) \in X$. Тогда функция $u = \psi(x)$ получит приращение Δu, а функция $y = \varphi(u)$ получит приращение Δy. Надо учесть, что так как функция $u = \psi(x)$ в точке x имеет производную, то она непрерывна в этой точке и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. При условии, что $\Delta u \neq 0$, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Перейдя в равенстве (2) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

т. е. формулу (1).

Теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 предполагалось, что каждому достаточно малому $\Delta x \neq 0$ соответствует $\Delta u \neq 0$. Если случится, что $\Delta u = 0$ при некотором Δx, то уже делить и умножать на Δu нельзя и надо доказывать формулу (1) другим способом. Это можно сделать, но соответствующее доказательство здесь не приводится. ●

ПРИМЕР 1. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ найдем производную функции $y = e^{2x}$. Полагаем $y = e^u$, $u = 2x$, поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot (2x)'_x = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

ПРИМЕР 2. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ найдем производную функции $y = e^{x^2}$. Полагаем $y = e^u$, $u = x^2$, поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot (x^2)'_x = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

ПРИМЕР 3. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ найдем производную функции $y = \sin(kx + b)$. Полагаем $y = \sin u$, $u = kx + b$, поэтому

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (kx + b)'_x = \cos u \cdot k = k\cos(kx + b).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $x > 0$ и любого $\alpha \neq 0$ справедлива формула

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Доказательство. Так как $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ для $x > 0$ и $\alpha \neq 0$, то, полагая $\varphi(u) = e^u$, $u = \psi(x) = \alpha \ln x$, получаем, что $y = x^\alpha = \varphi(\psi(x))$. Применяя теорему 1, имеем

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot (\alpha \ln x)'_x = e^u \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Теорема 2 доказана. ●

ПРИМЕР 4. Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$ для любого $x > 0$. Применяя теорему 2, имеем

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ПРИМЕР 5. Найдем производную функции $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ для любого $x > 0$. Применяя теорему 2, имеем

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}.$$

ПРИМЕР 6. Для каждого $x \neq 0$ найдем производную функции $y = \sqrt[5]{x^2}$.

Если $x > 0$, то функцию можно записать в виде $y = x^{\frac{2}{5}}$, тогда

$$y'_x = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}.$$

Если $x < 0$, то функцию можно записать в виде $y = \sqrt[5]{(-x)^2}$, а так как $-x > 0$, то в виде $y = (-x)^{-\frac{2}{5}}$. Теперь имеем

$$y'_x = \frac{2}{5}(u)^{-\frac{3}{5}} \cdot u' = \frac{2}{5u^{\frac{3}{5}}} \cdot u' = \frac{2}{5\sqrt[5]{(-x)^3}} \cdot (-x)' = \frac{2}{-5\sqrt[5]{x^3}} \cdot (-1) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}},$$

где $u(x) = -x$.

Итак, $y'(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ для каждого $x \neq 0$.

ПРИМЕР 7. Найдем производную функции $y = \sin^3 x^2$. Полагаем

$$y = u^3,\ u = \sin z,\ z = x^2,$$

поэтому

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin z)'_z \cdot (x^2)'_x = 3u^2 \cdot \cos z \cdot 2x =$$
$$= 3\sin^2 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 6x \sin^2 x^2 \cos x^2. \bullet$$

Укажите, при каких значениях x функция $f(x)$ имеет производную, и найдите эту производную, если **(4.52—4.60)**:

4.52 а) $f(x) = \pi^x + e^x$; б) $f(x) = x^e - x^\pi$;
в) $f(x) = \pi^x + x^\pi$; г) $f(x) = x^e - e^x$.

4.53 а) $f(x) = e^{3x}$; б) $f(x) = e^{-4x}$; в) $f(x) = e^{2x+1}$;
г) $f(x) = e^{-2x+7}$; д) $f(x) = 2^{5x}$; е) $f(x) = 6^{-3x}$;
ж) $f(x) = 4^{3x-8}$; з) $f(x) = 5^{-4x+1}$; и) $f(x) = 2^{-0,5x-2}$.

4.54* а) $f(x) = e^{x^3}$; б) $f(x) = e^{-x^4}$; в) $f(x) = 3^{x^3}$;
г) $f(x) = 5^{-x^4}$; д) $f(x) = e^{\sin x}$; е) $f(x) = 9^{\cos x}$.

4.55 а) $f(x) = \log_4(12x) - \log_2 x$; б) $f(x) = \log_4(-x) + \log_2(-x)$;
в) $f(x) = \ln(2x)$; г) $f(x) = \ln(5x - 10)$.

4.56* а) $f(x) = (\cos x)^4 - (\sin x)^4$; б) $f(x) = 4\cos 17x \cos 13x$;
в) $f(x) = 5\sin 10x \cos 8x$; г) $f(x) = 6\sin 7x \sin 3x$.

4.57 а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \cos(3x + 1)$;
в) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 3)$; г) $f(x) = \operatorname{ctg}(-5x)$.

4.58* а) $f(x) = \sin(x^2)$; б) $f(x) = \cos(x^4)$;
в) $f(x) = \operatorname{tg}(x^3)$; г) $f(x) = \operatorname{ctg}(x^5)$;
д) $f(x) = (\sin x)^2$; е) $f(x) = (\cos x)^4$;
ж) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^3$; з) $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^5$.

4.59 а) $f(x) = \ln(3x)$; б) $f(x) = \ln(5 - 2x)$;
в) $f(x) = \log_5(-3x - 1)$; г) $f(x) = \lg(2x + 4)$.

4.60 а) $f(x) = (2x + 1)^8$; б) $f(x) = (-2x - 3)^9$;
в) $f(x) = (4x - 3)^{10}$; г) $f(x) = (3x + 4)^{25}$.

4.61 Запишите формулу для вычисления производной функции $y = x^\alpha$, α — нецелое число. При каких значениях x справедлива эта формула?

Укажите, при каких значениях x функция $f(x)$ имеет производную, и найдите эту производную, если **(4.62—4.65):**

4.62 а) $f(x) = x^{0,5}$; б) $f(x) = x^{-0,5}$; в) $f(x) = x^{4,2}$; г) $f(x) = x^{-0,2}$; д) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$; е) $f(x) = x^{\frac{13}{3}}$; ж) $f(x) = x^{-3,5}$; з) $f(x) = x^{\frac{16}{3}}$.

4.63 а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; ж) $f(x) = x^2\sqrt{x}$; з) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$.

4.64* а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 10}$; б) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 4}$;
в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; г) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$;
д) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9}$; е) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 4}$;
ж) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}$; з) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$.

4.65* а) $f(x) = 4 \sin x \cos x$; б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;
в) $f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} 1000x}{1 - \operatorname{tg}^2 1000x}$; г) $f(x) = \sqrt[17]{\sin^2 7x + \cos^2 7x}$.

4.66* Докажите, что если в каждой точке интервала X функция $y = f(x)$ положительна и имеет производную, то на этом интервале совпадают промежутки знакопостоянства производных функций $y = f(x)$ и $y = \sqrt{f(x)}$.

4.67* Вычислите значение производной функции в указанных точках x_1 и x_2:
а) $y = (x - 2)^{20}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;
б) $y = (x + 5)^{21}$, $x_1 = -6$, $x_2 = -4$;
в) $y = (2x - 11)^{100}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 6$;
г) $y = (2x - 3)^{1001}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

4.68* Для любого $x > 0$ найдите производную функции:
а) $y = x^x$; б) $y = x^{\sin x}$; в) $y = x^{\cos x}$.

4.69 Докажите, что графики функций $f(x) = e^x$ и $\varphi(x) = x^e$ $(x > 0)$ в точке с абсциссой $x = e$ имеют общую касательную.

4.7*. Производная обратной функции

Пусть функция

$$y = f(x), \quad x \in [a; b], \tag{1}$$

является обратной к непрерывной и возрастающей на отрезке $[c; d]$ функции

$$x = \varphi(y), \quad y \in [c; d], \tag{2}$$

где $c = f(a)$, $d = f(b)$. Как показано в п. 3.2, функция (1) непрерывна и возрастает на отрезке $[a; b]$.

Если функция φ имеет в точке y интервала $(c; d)$ отличную от нуля производную, то функция f имеет в точке $x = \varphi(y)$ интервала $(a; b)$ производную

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Покажем это. Зададим в фиксированной точке $x = \varphi(y)$ интервала $(a; b)$ приращение аргумента $\Delta x \neq 0$: $(x + \Delta x) \in [a; b]$, тогда функция (1) получит приращение Δy. Так как обе функции (1) и (2) непрерывны на соответствующих отрезках, то из того, что $\Delta x \to 0$, следует, что $\Delta y \to 0$, а из того, что $\Delta y \to 0$, следует, что $\Delta x \to 0$. Поэтому, учитывая еще, что $\varphi'(y) \neq 0$, имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \varphi(y)}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

что и требовалось показать.

Из изложенного выше следует, что если функция φ имеет отличную от нуля производную в каждой точке интервала $(c; d)$, то функция f имеет в каждой точке интервала $(a; b)$ производную, вычисляемую по формуле

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))}.$$

Отметим, что аналогичные утверждения справедливы и для функций, непрерывных и строго монотонных на любом промежутке J.

ПРИМЕР 1. Найдем производную функции

$$y = \arcsin x, \ -1 < x < 1. \tag{3}$$

Функция (3) является обратной к функции

$$x = \sin y, \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \tag{4}$$

Поэтому для каждого $x \in (-1; 1)$

$$(\arcsin x)' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$, и, применив равенство (4), имеем $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{5}$$

ПРИМЕР 2. Найдем производную функции

$$y = \arccos x,\ -1 < x < 1.$$

Для вычисления производной функции $y = \arccos x$ можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным при выводе формулы (5). Но можно воспользоваться равенством $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, из которого следует, что $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Тогда

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

ПРИМЕР 3. Найдем производную функции

$$y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \boldsymbol{R}. \tag{6}$$

Функция (6) является обратной к функции

$$x = \operatorname{tg} y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Поэтому для любого $x \in \boldsymbol{R}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то, применив равенство (7), получаем, что $\operatorname{tg}^2 y = x^2$. Следовательно, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

ПРИМЕР 4. Найдем производную функции:

а) $y = \arcsin 3x,\ x \in \left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; б) $y = \arccos x^2,\ x \in (-1;\ 1)$;

в) $y = (\operatorname{arctg} x)^3,\ x \in \boldsymbol{R}$.

Применяя формулы из примеров 1—3 и формулу производной сложной функции, имеем:

а) $(\arcsin 3x)'_x = (\arcsin 3x)'_{3x} \cdot (3x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (3x)^2}} \cdot (3x)' = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

б) $(\arccos x^2)'_x = (\arccos x^2)'_{x^2} \cdot (x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$;

в) $((\operatorname{arctg} x)^3)'_x = 3(\operatorname{arctg} x)^2 \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{3(\operatorname{arctg} x)^2}{1 + x^2}$.

4.70° По какой формуле находят производную данной функции, используя производную обратной к ней функции?

4.71 Вычислите производную функции $y = f(x)$, используя производную обратной к ней функции $x = \varphi(y)$:

а) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$ и $x = y^2$, $y \in (0; +\infty)$;

б) $y = -\sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$ и $x = y^2$, $y \in (-\infty; 0)$;

в) $y = \ln x$, $x \in (0; +\infty)$ и $x = e^y$, $y \in \boldsymbol{R}$.

4.72 Найдите производную функции $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

4.73 Найдите производную данной функции:

а) $y = \arccos \pi x$, $x \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$; б) $y = \operatorname{arctg} x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $y = \arcsin 5x$, $x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$; г) $y = (\operatorname{arcctg} 3x)^5$, $x \in \boldsymbol{R}$;

д) $y = \arccos(-2x)$, $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; е) $y = (\arcsin 4x)^5$, $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

§ 5. Применение производной

5.1. Максимум и минимум функции

В п. 1.2 было дано определение наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на множестве. Наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ называют еще **максимумом функции на отрезке** $[a; b]$ и обозначают $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$. Наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$ называют еще **минимумом функции на отрезке** $[a; b]$ и обозначают $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$.

Можно доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существуют точки этого отрезка, в которых функция принимает свое наибольшее и наименьшее значения.

Мы будем считать это важное утверждение очевидным. Например, на рисунке 98 изображен график непрерывной на отрезке $[2; 6]$ функции $y = f(x)$, для которой $\max\limits_{[2;\,6]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[2;\,6]} f(x) = f(2) = 1$.

Точку отрезка $[a; b]$, в которой функция достигает максимума на этом отрезке, называют **точкой максимума**. Значение функции в этой точке и есть максимум функции на отрезке. Точку отрезка $[a; b]$, в которой функция достигает минимума на этом отрезке, называют **точкой минимума**. Значение функции в этой точке и есть минимум функции на отрезке. В приведенном выше примере $x = 3$ — точка максимума, а $x = 2$ — точка минимума.

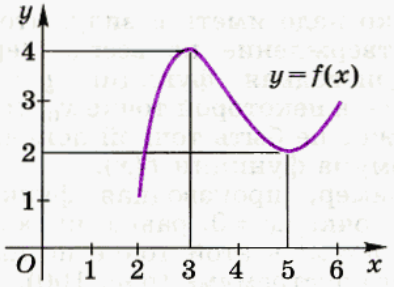


Рис. 98

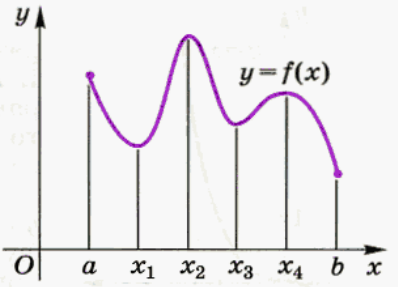


Рис. 99

Названия и обозначения максимума и минимума происходят от латинских слов maximum (наибольшее) и minimum (наименьшее).

На рисунке 99 изображен график непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$. Точка x_2 есть точка максимума этой функции на отрезке $[a; b]$. Кроме точки x_2, на рисунке отмечены еще три точки x_1, x_3, x_4. Точка x_4 не является точкой максимума на отрезке $[a; b]$. Однако можно указать отрезок $[x_4 - \delta; x_4 + \delta]$ $(\delta > 0)$, целиком принадлежащий отрезку $[a; b]$, настолько маленький, что на нем точка x_4 есть точка максимума этой функции. Такую точку называют точкой локального максимума (от латинского слова lokalis — местный, свойственный данному месту).

Итак, точку x_0 отрезка $[a; b]$ называют **точкой локального максимума** функции $y = f(x)$, если существует отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ $(\delta > 0)$, целиком принадлежащий отрезку $[a; b]$, на котором x_0 является точкой максимума.

Аналогично точку x_0 отрезка $[a; b]$ называют **точкой локального минимума** функции $y = f(x)$, если существует отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ $(\delta > 0)$, целиком принадлежащий отрезку $[a; b]$, на котором x_0 является точкой минимума.

На рисунке 99 x_1 и x_3 — точки локального минимума функции $y = f(x)$, а x_2 и x_4 — точки локального максимума функции $y = f(x)$. При этом x_2, кроме того, есть точка максимума этой функции на всем отрезке $[a; b]$.

Точки локального максимума и локального минимума функции $y = f(x)$ называют **точками локального экстремума** этой функции. Подчеркнем, что точки локального экстремума есть внутренние точки отрезка $[a; b]$, т. е. они принадлежат интервалу $(a; b)$. Иногда слово «локальный» в словосочетании «локальный экстремум» опускают, но подразумевают его.

Очевидно, что в точках локального экстремума функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 99, производная этой функции равна нулю: $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$, $f'(x_4) = 0$ (так как касательные в этих точках параллельны оси Ox и равны нулю тангенсы углов их наклона к оси Ox).

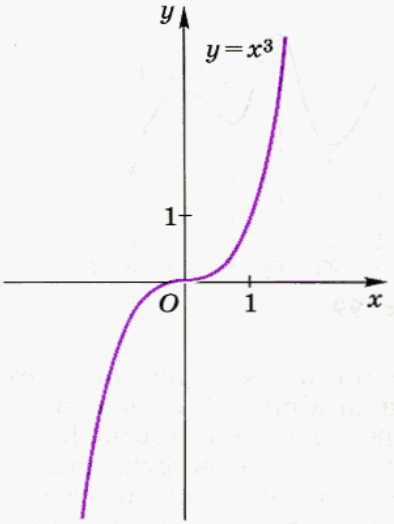


Рис. 100

Однако надо иметь в виду, что обратное утверждение не всегда верно. Если производная функции $y = f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, то эта точка может не быть точкой локального экстремума функции $f(x)$.

Например, производная функции $y = x^3$ в точке $x = 0$ равна нулю, но функция $y = x^3$ в этой точке не имеет локального экстремума (рис. 100).

Дадим формальное доказательство того факта, что **если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, являющейся точкой ее локального экстремума, то производная в этой точке равна нулю.**

В самом деле, пусть для определенности функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум. Тогда выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех x, достаточно близких к x_0, независимо от того, будет ли x больше или меньше x_0. Следовательно, для точек x, достаточно близких к x_0, выполняются неравенства

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \text{ если } x - x_0 > 0, \qquad (1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \text{ если } x - x_0 < 0. \qquad (2)$$

По условию функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, и поэтому существует предел

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Из неравенств (1) следует, что $f'(x_0) \leqslant 0$, а из неравенств (2) следует, что $f'(x_0) \geqslant 0$. Но это возможно, лишь если $f'(x_0) = 0$.

Пусть надо найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$ и имеющей производную на интервале $(a; b)$. Для этого надо найти производную $f'(x)$, приравнять ее к нулю и найти все корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения $f'(x_0) = 0$, принадлежащие интервалу $(a; b)$ (мы считаем, что число корней конечное). Далее надо вычислить значения функции

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b). \qquad (3)$$

Наибольшее из чисел (3) есть максимум функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а соответствующее ему значение x — точка максимума на отрезке $[a; b]$, наименьшее из чисел (3) есть минимум функции

$y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а соответствующее ему значение x — точка минимума на отрезке $[a; b]$.

Объясним, почему так можно отыскивать наибольшее и наименьшее значения, на примере отыскания максимума. Так как по условию функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $x_0 \in [a; b]$, в которой функция достигает максимума на отрезке $[a; b]$. Возможны два случая: 1) x_0 является одним из концов отрезка $[a; b]$, т. е. $x_0 = a$ или $x_0 = b$; 2) x_0 — внутренняя точка отрезка $[a; b]$, т. е. $x_0 \in (a; b)$. Во втором случае, как показано выше, производная функции в точке x_0 равна нулю.

ПРИМЕР 1. Вычислим максимум и минимум функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.

1) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

2) Приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$3x(x - 2) = 0.$$

Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ есть точки, в которых $f'(x) = 0$. Точки x_1 и x_2 — критические точки функции, так как обе они принадлежат интервалу $(-1; 4)$.

3) Вычислим значения функции в точках -1, 0, 2, 4:

$$f(-1) = -4,\ f(0) = 0,\ f(2) = -4,\ f(4) = 16. \qquad (4)$$

4) Найдем наибольшее и наименьшее из чисел (4):

$$\max_{[-1;\,4]} f(x) = f(4) = 16, \quad \min_{[-1;\,4]} f(x) = f(-1) = f(2) = -4.$$

Таким образом, функция $f(x)$ на отрезке $[-1; 4]$ достигает максимума ($y = 16$) в точке $x = 4$, минимума ($y = -4$) в двух точках: $x = -1$ и $x = 2$.

ПРИМЕР 2. Найдем максимум и минимум функции

$$f(x) = |x - 2| \text{ на отрезке } [0; 6].$$

График этой функции на отрезке $[0; 6]$ изображен на рисунке 101. Как видно из графика,

$$\max_{[0;\,6]} f(x) = f(6) = 4,$$

$$\min_{[0;\,6]} f(x) = f(2) = 0.$$

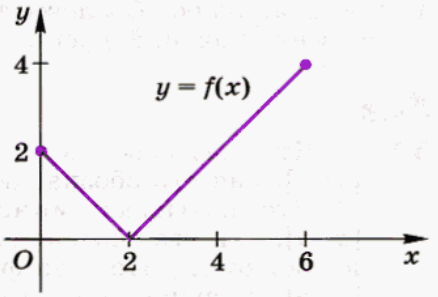


Рис. 101

Чтобы найти максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $[0; 6]$ без опоры на график, надо разбить отрезок $[0; 6]$ на два отрезка $[0; 2]$ и $[2; 6]$, во внутренних точках этих отрезков производная функции не обращается в нуль (а в точке 2 она не

существует). Следовательно, для отыскания максимума и минимума на каждом из отрезков [0; 2] и [2; 6] надо сравнить значения функции на концах этих отрезков, а для отыскания максимума и минимума на всем отрезке [0; 6] надо сравнить значения функции в точках 0, 2, 6.

Итак, для нахождения максимума и минимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ надо знать значения функции в точках интервала $(a; b)$, в которых у нее нет производной.

Внутренние точки отрезка, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует, называют **критическими точками** функции $f(x)$ на этом отрезке.

Из изложенного выше следует, что **при отыскании максимума и минимума функции на отрезке надо найти критические точки, лежащие внутри этого отрезка, и сравнить значения функции на концах отрезка и в критических точках.**

Аналогично определяются максимум и минимум функции на интервале или полуинтервале. Однако здесь имеется существенная разница. Максимум или минимум функции на интервале или полуинтервале может не достигаться. Например, если считать, что на рисунке 98 изображен график непрерывной функции $y = f(x)$, но заданной на полуинтервале (2; 6], то она достигает на этом полуинтервале своего максимума 4 в точке 3, но не достигает минимума ни в одной точке этого полуинтервала, так как точка 2 исключена из рассмотрения. В любой точке x_1, близкой к точке 2, минимум не достигается, так как есть другие значения $x_2 \in (2; 6]$, для которых $f(x_2) < f(x_1)$.

ПРИМЕР 3. Найдем максимум и минимум функции

$$f(x) = |x - 2| \text{ на интервале } (0; 6).$$

Минимум функции $f(x)$ на интервале (0; 6) достигается в точке $x = 2$:

$$\min_{(0;\,6)} f(x) = f(2) = 0.$$

Максимум функции $f(x)$ на интервале (0; 6) не существует, так как в точке $x = 6$ функция $f(x)$ не определена, и поэтому для точек x, лежащих на оси Ox левее точки 6, но сколь угодно близких к ней, среди всех значений $f(x)$ не существует наибольшего.

5.1° а) Что называют максимумом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, как его обозначают?

б) Что называют минимумом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, как его обозначают?

в) Верно ли, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существуют точки этого отрезка, в которых функция принимает свое наибольшее и наименьшее значения?

г) Какую точку отрезка $[a; b]$ называют точкой максимума функции $y = f(x)$; точкой минимума функции $y = f(x)$? Как называют значения функции в этих точках?
д) Какую точку отрезка $[a; b]$ называют точкой локального максимума; локального минимума функции $y = f(x)$? Как называют значения функции в этих точках?
е) Что называют точками локального экстремума функции $y = f(x)$?
ж) Верно ли, что если производная функции $y = f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, то эта точка может не быть точкой локального экстремума функции $y = f(x)$? Приведите пример.
з) Какие точки отрезка $[a; b]$ называют критическими точками функции? Как найти эти точки?
и) Объясните порядок отыскания максимума и минимума функции на отрезке.
к)* Объясните порядок отыскания максимума и минимума функции на интервале; полуинтервале.

5.2 Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 4]$, ее график изображен на рисунке 102, *а*, *б*. Найдите критические точки функции на отрезке $[-4; 4]$. В каких из них производная функции равна нулю; в каких не существует?

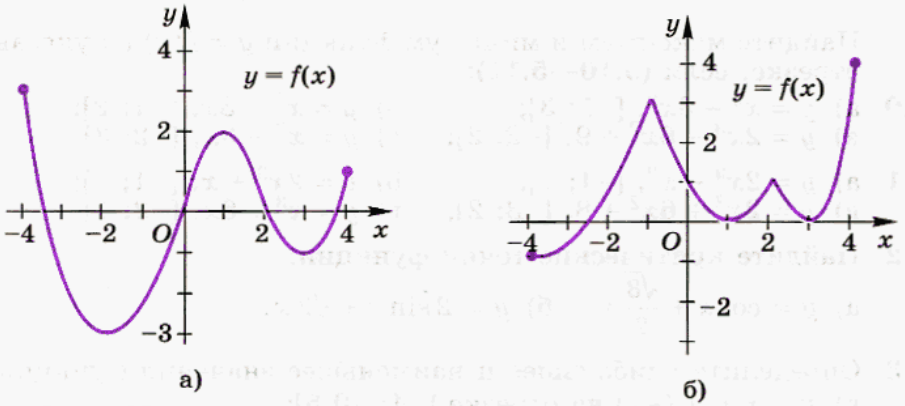


Рис. 102

5.3 В задании **5.2** укажите:
а) точки максимума и минимума;
б) точки локального экстремума;
в) максимум и минимум;
г) локальные экстремумы.

5.4* Выполните задание **5.3**, если функция определена:
а) на интервале $(-4; 4)$;
б) на полуинтервале $[-4; 4)$;
в) на полуинтервале $(-4; 4]$.

5.5* Укажите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2; 2]$, если:

а) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -1 \\ x + 2, & \text{если } -1 \leqslant x < 1 \\ -3x + 6, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } x < -1 \\ -3x, & \text{если } -1 \leqslant x < 1 \\ x - 4, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$

в) $y = |x - 1| + |2x + 1|$; г) $y = |x - 1| - |2x + 1|$.

Найдите критические точки функции $y = f(x)$ на указанном промежутке, если **(5.6—5.9)**:

5.6 а) $y = 2x^3 - 3x^2$, $[-3; 3]$; б) $y = 5x^3 - 15x$, $[-2; 2]$;
в) $y = 3x^4 + x^3 + 7$, $[-3; 2]$; г) $y = x^4 - 4x^2$, $[-4; 4]$.

5.7 а) $y = \sqrt[3]{x}$, $[-1; 1]$; б) $y = \sqrt[5]{x}$, $[-2; 2]$;
в) $y = 4\sqrt{x} - x$, $(0; 5]$; г) $y = 2\sqrt{x} - x$, $(0; 2]$.

5.8 а) $y = e^x - x$, $[-3; 2]$; б) $y = e^x - xe$, $[-2; 2]$;
в) $y = \sin 2x - x$, $[-\pi, \pi]$; г) $y = \cos 2x + x$, $[-\pi, \pi]$.

5.9* а) $y = e^{x^2} - ex^2$, $[-e; e]$; б) $y = e^{x^2 - 2x}$, $[-\pi, \pi]$;
в) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $(0; \pi]$; г) $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$, $(-1; \pi]$.

Найдите максимум и минимум функции $y = f(x)$ на указанном отрезке, если **(5.10—5.11)**:

5.10 а) $y = x^3 - 3x^2$, $[-1; 3]$; б) $y = x^3 + 3x$, $[-1; 2]$;
в) $y = 2x^3 - 6x^2 + 9$, $[-2; 2]$; г) $y = x^3 - 3x$, $[-2; 3]$.

5.11 а) $y = 2x^3 - x^2$, $[-1; 1]$; б) $y = 2x^3 + x$, $[-1; 1]$;
в) $y = 2x^3 + 6x^2 + 8$, $[-3; 2]$; г) $y = x^3 + 6x$, $[-2; 1]$.

5.12 Найдите критические точки функции:

а) $y = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$; б) $y = 2\sin x + \sqrt{2}\,x$.

5.13 Определите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = x + \ln(-x)$ на отрезке $[-4; -0{,}5]$;

б) $y = x + e^{-x}$ на отрезке $[-\ln 4; \ln 2]$.

Можно считать, что $\ln 2 \approx 0{,}7$.

5.14* Найдите максимум и минимум функции $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$ на:

а) отрезке $[-2; 2]$; б) интервале $(-2; 2)$;
в) полуинтервале $(-2; 2]$; г) полуинтервале $[-2; 2)$.

5.15* Найдите максимум и минимум функции $y = \sqrt{|x|}$ на:

а) отрезке $[-1; 1]$; б) интервале $(-1; 1)$;
в) полуинтервале $[-1; 1)$; г) полуинтервале $(-1; 1]$.

5.16 При каком значении a наибольшее значение функции $y = |x - a|$ на отрезке $[-2; 3]$:
а) равно 4,5; б) равно 3,5; в) достигается в двух точках?

5.17 Последовательность задана формулой общего члена:
а) $x_n = n^2 - 30{,}5n + 205$; б) $x_n = n^2 - 40{,}5n + 305$.
Найдите наименьший член последовательности.

5.2. Уравнение касательной

ТЕОРЕМА. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$ и имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производную. Тогда график этой функции имеет в точке $(x_0; f(x_0))$ касательную, уравнение которой $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$.

Доказательство. Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной l, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ — угловой коэффициент прямой l (рис. 103).

Поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

где b — некоторое число, которое надо определить.

Если $(x_0; y_0)$ — точка касания, то выполняется равенство

$$y_0 = kx_0 + b, \qquad (2)$$

выражающее, что точка $(x_0; y_0)$ принадлежит прямой l.

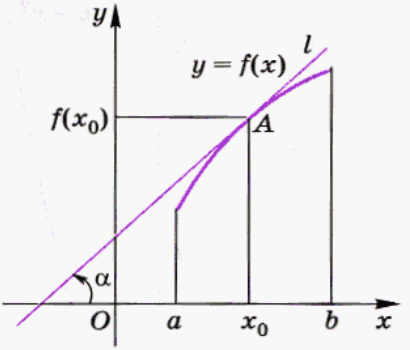


Рис. 103

Найдя b из равенства (2) и подставив его в уравнение (1), получим уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0 = -2$.

Функция $f(x) = x^2$ имеет производную $f'(x) = 2x$. Отсюда

$$y_0 = f(x_0) = (x_0)^2 = (-2)^2 = 4,$$
$$k = f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Согласно теореме уравнение касательной имеет вид $y - 4 = -4(x + 2)$, т. е. $y = -4x - 4$.

Касательная к графику функции $f(x) = x^2$ в точке графика с абсциссой -2 изображена на рисунке 104.

ПРИМЕР 2. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x - 7$, параллельной прямой $y = 4x + 5$.

Вычислим угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

Так как $f'(x) = (-x^2 + 6x - 7)' = -2x + 6$, то $k = f'(x_0) = -2x_0 + 6$.

По условию касательная должна быть параллельна прямой $y = 4x + 5$, следовательно, ее угловой коэффициент должен быть равен 4, т. е. $-2x_0 + 6 = 4$, откуда $x_0 = 1$.

Вычислим значение функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 1$:

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = -1^2 + 6 \cdot 1 - 7 = -2,$$

тогда согласно теореме уравнение касательной имеет вид

$$y + 2 = 4(x - 1), \text{ т. е. } y = 4x - 6.$$

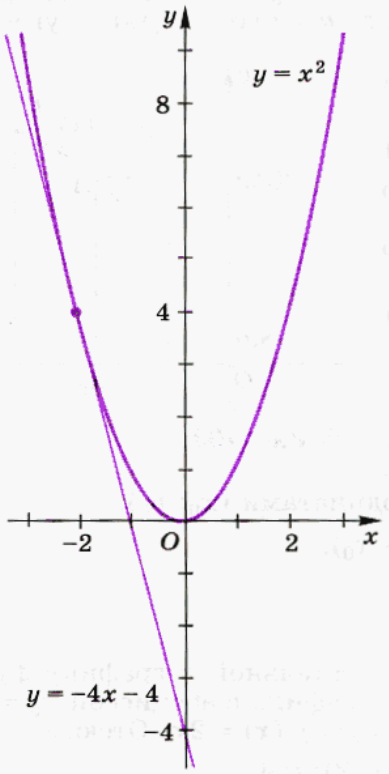


Рис. 104

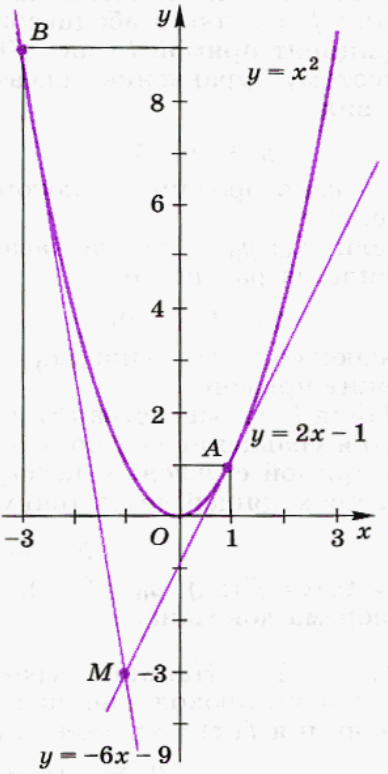


Рис. 105

ПРИМЕР 3. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$, проходящей через точку $M(-1; -3)$.

Так как $f(-1) = (-1)^2 = 1 \neq -3$, то точка M не принадлежит графику функции $f(x) = x^2$.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания, тогда $y_0 = f(x_0) = x_0^2$, и так как $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то $k = f'(x_0) = 2x_0$.

Поэтому уравнение касательной имеет вид $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, т. е. вид

$$y = 2x_0x - x_0^2. \qquad (3)$$

Точка $M(-1; -3)$ принадлежит касательной, заданной уравнением (3), поэтому, чтобы найти x_0, подставим координаты точки M в уравнение (3). Получим верное равенство

$$-3 = 2x_0(-1) - x_0^2. \qquad (4)$$

Решив уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, получим, что условию (4) удовлетворяют числа $x_0 = 1$ и $x_0 = -3$. Это означает, что существуют две касательные к графику функции $f(x) = x^2$, проходящие через точку $M(-1; -3)$:

$$y = 2x - 1 \text{ и } y = -6x - 9.$$

Эти прямые касаются графика функции $f(x) = x^2$ в точках $A(1; 1)$ и $B(-3; 9)$ (рис. 105). ●

5.18 Какими свойствами должна обладать функция $y = f(x)$, заданная на интервале $(a; b)$, чтобы в точке с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ ее график имел касательную? Каково уравнение этой касательной?

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если **(5.19—5.30)**:

5.19 $f(x) = x^2$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = 2$; г) $x_0 = -1$.

5.20 $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = -1$; г) $x_0 = -2$.

5.21 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = -1$; г) $x_0 = -2$.

5.22 $f(x) = \sin x$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; г) $x_0 = \pi$.

5.23 $f(x) = \cos x$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; г) $x_0 = -\pi$.

5.24 $f(x) = \operatorname{tg} x$.

а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $x_0 = -\frac{\pi}{4}$; г) $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5.25 $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

а) $x_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; в) $x_0 = \frac{\pi}{4}$; г) $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

5.26 $f(x) = \ln x$.

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = 3$; г) $x_0 = e$.

5.27 $f(x) = \log_2 x$.

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = 4$; г) $x_0 = 8$.

5.28 $f(x) = 2^x$.

а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 2$; г) $x_0 = 3$.

5.29 $f(x) = e^x$.

а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = 0$; г) $x_0 = 2$.

5.30 а) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} + \ln(2 - x)$, $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \cos \pi x - e^{1-x}$, $x_0 = 1$.

5.31 В каких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox, если:

а) $f(x) = x^2 + 4x - 12$; б) $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$;

в) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 1$; г) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7$?

5.32* Углом пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой l называют угол между прямой l и касательной к графику функции, проведенной в точке пересечения. Под каким углом пересекает ось Ox график функции $y = f(x)$ в каждой из точек пересечения, если:

а) $y = x^2 + x - 2$; б) $y = 5x^2 + 4x - 9$;

в) $y = 2x^3 - 12x^2 + x - 6$; г) $y = x^3 + 6x^2 + 5x$?

5.33* Под каким углом пересекает ось Oy график функции в предыдущем задании?

5.34 Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = e$, если:

а) $f(x) = x^e$; б) $f(x) = e^x$.

5.35 Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 - 2x + 1$ и $\varphi(x) = -x^2 + 4x - 8$. Найдите два способа решения задачи.

5.36 а) При каком значении a прямая $y = 7x + a$ является касательной к графику функции $y = x^4 + 3x$?
б) При каком значении a прямая $y = -10x + a$ является касательной к графику функции $y = x^6 - 4x$?

5.3. Приближенные вычисления

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 и требуется найти приближенно значение этой функции в близкой к точке x_0 точке $x = x_0 + \Delta x$.

Так как функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то справедливо равенство

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При Δx, близких к нулю, справедливо приближенное равенство

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

которое выполняется тем точнее, чем ближе значение Δx к нулю.

Из приближенного равенства (1) получаем приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (2)$$

Приведем примеры использования равенства (2) для приближенных вычислений.

ПРИМЕР 1. Вычислим приближенно значение функции $f(x) = x^{10}$ в точке $x = 1{,}01$.

Имеем $x = 1 + 0{,}01$. Примем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$. Тогда так как $f'(x) = 10x^9$, то $f(x_0) = f(1) = 1^{10} = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = 10 \cdot 1^9 = 10$.

Используя равенство (2), имеем

$$f(1{,}01) = f(1 + 0{,}01) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}01 = 1 + 10 \cdot 0{,}01 = 1{,}1.$$

ПРИМЕР 2. Вычислим приближенно $\sqrt{3{,}96}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ для $x > 0$. Примем $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}04$. Тогда так как $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2, \quad f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Используя равенство (2), имеем

$$f(4 - 0{,}04) \approx f(4) + f'(4) \cdot (-0{,}04) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (-0{,}04) = 1{,}99.$$

Итак, $\sqrt{3{,}96} \approx 1{,}99$.

ПРИМЕР 3. Вычислим приближенно $\operatorname{tg} 46°$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$. Так как $46° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$ (радиан), то положим $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$. Тогда так как $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то

$$f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2.$$

Используя равенство (2), имеем

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1{,}035.$$

Итак, $\operatorname{tg} 46° \approx 1{,}035$. ●

5.37 Напишите формулу для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$.

5.38 Вычислите приближенно $f(x_0 + \Delta x)$, если:

а) $f(x) = x^2$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}01$;
б) $f(x) = x^3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}01$;
в) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$, $\Delta x = 0{,}02$;
г) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $\Delta x = 0{,}01$;
д) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}02$.

5.39 Вычислите приближенно:

а) $5{,}01^2$; б) $7{,}98^2$; в) $2{,}99^3$; г) $\sqrt{24{,}1}$;
д) $\sqrt{35{,}98}$; е) $\sqrt[3]{124}$; ж) $\sqrt[3]{215}$; з) $\ln 3$;
и) $1{,}01^{20}$; к) $0{,}98^{20}$; л) $2{,}01^{10}$; м) $1{,}99^{10}$.

5.40 Покажите, как из формулы (2) следует формула для приближенного вычисления квадратного корня из числа, близкого к 1:

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x.$$

Вычислите приближенно с помощью этой формулы:

а) $\sqrt{1{,}01}$; б) $\sqrt{1{,}02}$; в) $\sqrt{0{,}99}$; г) $\sqrt{0{,}98}$.

5.41 Покажите, как из формулы (2) следует формула для приближенного вычисления n-й степени числа, близкого к 1:

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Вычислите приближенно с помощью этой формулы:

а) $(1{,}001)^{100}$; б) $(0{,}998)^{100}$; в) $(1{,}003)^{25}$; г) $(0{,}9997)^{25}$;

д) $\left(\frac{1000}{1001}\right)^{10}$; е) $\left(\frac{1000}{998}\right)^{15}$; ж) $\left(\frac{1000}{1003}\right)^{20}$; з) $\left(\frac{10\,000}{9997}\right)^{35}$.

5.42* Вычислите приближенно:

а) $\sin 1°$; б) $\sin 2°$; в) $\sin 31°$; г) $\sin 29°$;

д) $\cos 91°$; е) $\cos 61°$; ж) $\cos 59°$; з) $\cos 89°$.

5.43* а) $\operatorname{tg} 47°$; б) $\operatorname{tg} 2°$; в) $\operatorname{ctg} 46°$; г) $\operatorname{ctg} 88°$.

5.4*. Теоремы о среднем

Ниже доказаны теоремы, имеющие большое значение в математическом анализе, — **теорема Ролля** и **теорема Лагранжа**. Их называют теоремами о среднем.

ТЕОРЕМА 1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет производную на интервале $(a; b)$ и принимает равные значения на концах отрезка $[a; b]$, т. е. $f(b) = f(a)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна такая точка c, в которой производная этой функции равна нулю: $f'(c) = 0$, $a < c < b$.

На рисунках 106 и 107 изображены графики функций, удовлетворяющих условию теоремы Ролля. У первой функции имеется только одна точка c интервала $(a; b)$, в которой ее производная равна нулю ($f'(c) = 0$), у второй функции имеются две такие точки c_1 и c_2 ($f'(c_1) = f'(c_2) = 0$).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точки, в которых функция f достигает на отрезке $[a; b]$ соответственно минимума и максимума.

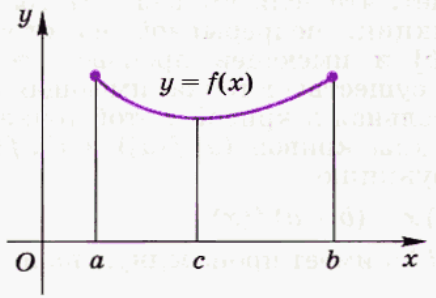


Рис. 106

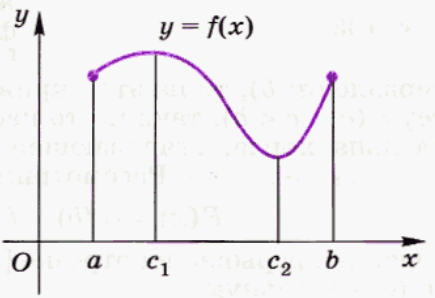


Рис. 107

Если $f(x_1) < f(a)$, то тогда $f(x_1) < f(b)$, так как $f(a) = f(b)$. Это означает, что точка x_1 принадлежит интервалу $(a; b)$ и в ней функция f достигает локального минимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_1) = 0$ и можно считать, что $c = x_1$.

Если $f(x_2) > f(a)$, то тогда $f(x_2) > f(b)$, так как $f(a) = f(b)$. Это означает, что точка x_2 принадлежит интервалу $(a; b)$ и в ней функция f достигает локального максимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_2) = 0$ и можно считать, что $c = x_2$.

Остается еще один случай, когда $f(x_1) = f(x_2)$. Но тогда так как $f(a) = f(b)$, то для всех x из отрезка $[a; b]$ значения функции $f(x)$ равны одной и той же константе $A = f(a)$. В этом случае в качестве c можно взять любую точку интервала $(a; b)$ — в ней $f'(c) = 0$.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет производную на интервале $(a; b)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна такая точка c, в которой производная этой функции удовлетворяет равенству

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b), \qquad (1)$$

или, что то же самое, равенству

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (a < c < b). \qquad (2)$$

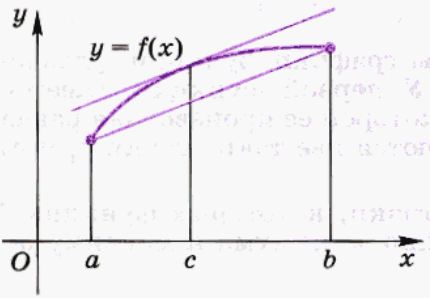


Рис. 108

Теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл (рис. 108). Левая часть равенства (1) есть тангенс угла наклона к оси Ox хорды, стягивающей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а правая есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой точке с абсциссой c, принадлежащей интервалу $(a; b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая есть график функции, непрерывной на отрезке $[a; b]$ и имеющей производную на интервале $(a; b)$, то на этой кривой существует точка, имеющая абсциссу c $(a < c < b)$, такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x).$$

Она непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную на интервале $(a; b)$, равную

$$F'(x) = (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(x).$$

Кроме того, $F(b) = -f(a)b + af(b)$, $F(a) = f(b)a - bf(a)$, и, следовательно, $F(a) = F(b)$. Но тогда по теореме Ролля на интервале $(a; b)$ существует точка c, для которой $F'(c) = 0$, т. е.

$$(f(b) - f(a)) - (b - a)f'(c) = 0 \quad (a < c < b),$$

откуда следует равенство (2).

ПРИМЕР. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и имеет производную по крайней мере на интервале $(0; 1)$. К ней применима теорема Лагранжа. Это означает, что существует точка $c \in (0; 1)$, такая, что

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1. \qquad (3)$$

Так как $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, то $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} = 1$, откуда следует, что $c = \dfrac{1}{4}$. Значит, в точке $c = \dfrac{1}{4}$ справедливо равенство (3).

5.44° Сформулируйте теорему Ролля.

5.45 Не вычисляя производной, объясните, почему внутри указанного отрезка функция $f(x)$ имеет точку, в которой производная этой функции равна нулю, если:

а) $f(x) = -x^3 + 3x$, $[-1; 2]$; б) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $[-3; 0]$.

5.46 Сформулируйте теорему Лагранжа.

5.47 Дана функция $f(x)$. Внутри отрезка $[a; b]$ найдите точку c, для которой справедливо равенство $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, если:

а) $f(x) = x^3$, $a = -1$, $b = 2$; б) $f(x) = x^3$, $a = -2$, $b = 1$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $b = 27$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -27$, $b = 0$.

5.48 Через две точки A и B графика функции $y = x^2$, имеющие соответственно абсциссы a и b, проведена секущая AB. Существует ли точка C графика функции с абсциссой $c \in (a; b)$, через которую можно провести касательную к графику этой функции, параллельную секущей AB?

5.5. Возрастание и убывание функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и имеет внутри промежутка производную $f'(x)$. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ внутри промежутка I, то функция f возрастает на промежутке I;

2) если $f'(x) < 0$ внутри промежутка I, то функция f убывает на промежутке I.

В самом деле, $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x и положительным направлением оси Ox. Но если $f'(x) > 0$ внутри промежутка I, то всюду внутри него угол α острый, что может быть, только если функция возрастает на промежутке I (рис. 109, *а*).

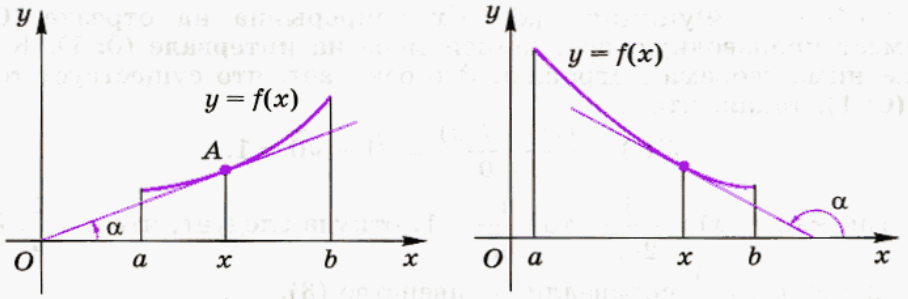


Рис. 109

Подчеркнем, что при этом на концах промежутка I производная может быть равна нулю или не существовать.

Если же $f'(x) < 0$ внутри промежутка I, то всюду внутри него угол α тупой, что может быть, только если функция убывает на промежутке I (рис. 109, *б*).

Приведенные здесь рассуждения не являются доказательством утверждений 1 и 2, они лишь дают представление о связи знака производной функции внутри промежутка I и поведения самой функции (возрастания, убывания) на промежутке I.

Утверждения 1 и 2 являются следствиями следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и имеет производную $f'(x)$ в каждой точке внутри промежутка I. Тогда:

а) если $f'(x) > 0$ для каждого x внутри промежутка I, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке I;

б) если $f'(x) < 0$ для каждого x внутри промежутка I, то функция $f(x)$ убывает на промежутке I;

в) если $f'(x) = 0$ для каждого x внутри промежутка I, то функция $f(x)$ постоянная (константа) на промежутке I.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — любые точки промежутка I, такие, что $x_1 < x_2$. Рассмотрим отрезок $[x_1; x_2]$. Так как $[x_1; x_2] \subset I$, то функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_1; x_2]$ и внутри его имеет производную. Применяя теорему Лагранжа, получаем, что на интервале $(x_1; x_2)$ найдется такая точка c, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

а) Если $f'(x) > 0$ для всех x внутри промежутка I, то $f'(c) > 0$, и тогда из равенства (1) следует, что

$$f(x_2) > f(x_1). \qquad (2)$$

Так как x_1 и x_2 — любые точки промежутка I, то неравенство (2) означает, что функция f возрастает на промежутке I.

б) Если $f'(x) < 0$ для всех x внутри промежутка I, то $f'(c) < 0$, и тогда из равенства (1) следует, что

$$f(x_2) < f(x_1). \qquad (3)$$

Так как x_1 и x_2 — любые точки промежутка I, то неравенство (3) означает, что функция f убывает на промежутке I.

в) Если же $f'(x) = 0$ для всех x промежутка I, то $f'(c) = 0$, и тогда из равенства (1) следует, что

$$f(x_2) = f(x_1). \qquad (4)$$

Так как x_1 и x_2 — любые точки промежутка I, то равенство (4) означает, что функция $f(x) = C$ для всех x промежутка I, где $C = f(x_1)$. ●

ПРИМЕР 1. Найдем промежутки возрастания функции

$$f(x) = x^3. \qquad (5)$$

Функция (5) непрерывна и имеет производную для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Так как $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, то $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x \neq 0$.

По утверждению 1 функция (5) возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$. Но тогда функция (5) возрастает и на всем интервале $(-\infty; +\infty)$.

В самом деле, пусть $x_1 < x_2$, тогда если $x_2 \in (-\infty; 0]$ или $x_1 \in [0; +\infty)$, то уже доказано, что $f(x_1) < f(x_2)$. Остается случай $x_1 < 0 < x_2$. В этом случае из возрастания функции на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ следует, что $f(x_1) < f(0)$ и $f(0) < f(x_2)$, но тогда $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, функция (5) является возрастающей на всем интервале $(-\infty; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Найдем промежутки возрастания (убывания) функции

$$f(x) = \ln(x^2 - 3). \qquad (6)$$

Функция (6) определена при $x^2 - 3 > 0$, т. е. на объединении интервалов $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$. На каждом из этих интервалов функция (6) имеет производную. Так как

$$f'(x) = \frac{2x}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})},$$

то ни в одной из точек этих интервалов производная функции (6) не обращается в нуль.

Так как $f'(x) > 0$ для любых $x > \sqrt{3}$ и $f'(x) < 0$ для любых $x < -\sqrt{3}$, то по утверждениям 1 и 2 функция (6) возрастает на промежутке $(\sqrt{3}; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -\sqrt{3})$. Она не определена на отрезке $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Утверждения 1 и 2 позволяют определять, является ли критическая точка, в которой производная равна нулю, точкой локального максимума или точкой локального минимума.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную внутри промежутка I и критическая точка x_0 лежит внутри I, тогда:
а) если в точке x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка локального максимума;
б) если в точке x_0 производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка локального минимума.

Рассмотрим случай «а». Действительно, так как производная слева от точки x_0 (в левой ее полуокрестности, т. е. в интервале $(x_0 - \delta; x_0)$, где $\delta > 0$) положительна, то функция возрастает на промежутке $(x_0 - \delta; x_0]$. Так как производная справа от точки x_0 (в правой ее полуокрестности, т. е. в интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$) отрицательна, то функция убывает на промежутке $[x_0; x_0 + \delta)$. Значит, в точке x_0 она принимает наибольшее значение среди всех значений в ее окрестности, т. е. точка x_0 — точка локального максимума.

Если обозначить возрастание функции знаком ↗, а убывание — знаком ↘, то схематически проведенное рассуждение можно изобразить так, как на рисунке 110.

Рассуждая аналогично, получим, что в случае «б» точка x_0 — точка локального минимума (рис. 111).

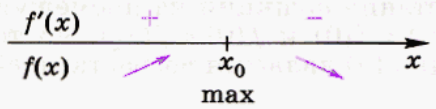


Рис. 110

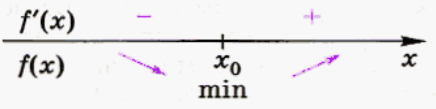


Рис. 111

ПРИМЕР 3. Найдем промежутки возрастания (убывания) и точки локального экстремума функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$$

Функция $f(x)$ имеет производную для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Так как $f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x - 1)' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$, то:
$f'(x) = 0$ при $x = 1$ и при $x = 3$;
$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 1)$ и при $x \in (3; +\infty)$;
$f'(x) < 0$ при $x \in (1; 3)$.

По утверждениям 1 и 2 функция $f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$, убывает на промежутке $[1; 3]$ (рис. 112).

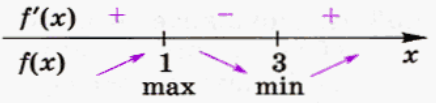


Рис. 112

Следовательно, в точке $x = 1$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум, а в точке $x = 3$ — локальный минимум.

5.49 Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и имеет внутри промежутка производную $f'(x)$. Объясните, как по знаку производной можно заключить, возрастает или убывает она на промежутке I.

5.50 Докажите, что функция $f(x)$ возрастает на указанном промежутке, если:

а) $f(x) = 3x + 4$, $x \in \boldsymbol{R}$;
б) $f(x) = kx + l$, $k > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$;
в) $f(x) = x^2$, $x \in [0; +\infty)$;
г) $f(x) = -x^2$, $x \in (-\infty; 0]$;
д) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
е) $f(x) = \cos x$, $x \in [\pi; 2\pi]$;
ж) $f(x) = 2^x$, $x \in \boldsymbol{R}$;
з) $f(x) = \log_2 x$, $x \in (0; +\infty)$.

5.51 Докажите, что функция $f(x)$ убывает на указанном промежутке, если:

а) $f(x) = -3x + 8$, $x \in \boldsymbol{R}$;
б) $f(x) = kx + l$, $k < 0$, $x \in \boldsymbol{R}$;
в) $f(x) = -x^2$, $x \in [0; +\infty)$;
г) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$;
д) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
е) $f(x) = \cos x$, $x \in [0; \pi]$;
ж) $f(x) = (0{,}5)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$;
з) $f(x) = \log_{0,5} x$, $x \in (0; +\infty)$.

5.52 Докажите, что функция:

а) $f(x) = 2x + \cos x$; б) $f(x) = x + \sin x$

возрастает на промежутке $\boldsymbol{R}$.

5.53 Докажите, что функция:

а) $f(x) = -2x + \cos x$; б) $f(x) = -x + \sin x$

убывает на промежутке $\boldsymbol{R}$.

5.54 Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

5.55 Докажите, что функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$.

5.56 а) Докажите, что функция $y = \ln(4 - 2x)$ убывает на полной области определения.

б) Докажите, что функция $y = \ln(2x - 6)$ возрастает на полной области определения.

5.57 Найдите критические точки, промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$; б) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$;

в) $y = 5x^2 - \ln x$; г) $y = \ln x - 2x^2$.

5.58 Для функции $f(x)$ найдите промежутки непрерывности, промежутки возрастания (убывания), если:

а) $f(x) = \dfrac{x - 2{,}5}{x^2 - 4}$; б) $f(x) = \dfrac{x - 5}{9 - x^2}$;

в) $f(x) = 2x^2 - \ln x$; г) $f(x) = \ln x - 4{,}5x^2$.

5.59* Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$ на отрезке $[-1; 3]$ имеет единственный нуль. Сколько нулей на промежутке $(-\infty; +\infty)$ имеет функция $f(x)$? Определите точки локального экстремума функции $f(x)$.

5.60* Определите точки локального экстремума функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$; б) $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 1}$.

Достигает ли функция $f(x)$ в точках локального экстремума своего наибольшего (наименьшего) значения?

5.61* Докажите, что функция $f(x) = x^4 + 4x^3 + 28$ принимает положительные значения для каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

5.6. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке интервала I. Тогда $f'(x)$ есть функция, также определенная на интервале I. Если функция $f'(x)$ имеет производную в каждой точке интервала I, то ее называют **второй производной** функции $f(x)$ и обозначают так: $f''(x)$. Тогда $f''(x)$ также есть функция, определенная на интервале I. Аналогично определяются производные высших порядков $f^{(n)}(x)$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$) функции $f(x)$.

Отметим, что $f'(x)$ — производную функции $f(x)$ — называют иногда первой производной функции $f(x)$.

ПРИМЕР 1. Найдем вторую производную функции

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Так как функция $f(x)$ определена и имеет производную в каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$, то функция

$$f'(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

также определена в каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$. Она имеет в каждой точке этого интервала производную

$$f''(x) = (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)' = 12x^2 + 6x + 2.$$

ПРИМЕР 2. Найдем четвертую производную функции

$$f(x) = \sin x.$$

В каждой точке интервала $(-\infty; +\infty)$ имеем

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x, \quad f''(x) = (\cos x)' = -\sin x,$$
$$f'''(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \sin x.$$

Отметим, что в механике движение называют **равномерным**, если его скорость постоянна, и движение называют **равноускоренным**, если его ускорение постоянно.

Пусть точка движется по прямой по закону

$$s = f(t). \qquad (1)$$

Первая производная функции (1) есть скорость точки:

$$s' = f'(t).$$

Вторая же производная функции (1) есть скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки:

$$s'' = f''(t).$$

Таким образом, если точка движется по закону (1), то **механический смысл второй производной** заключается в том, что вторая производная определяет ускорение этой точки.

Если точка движется по прямой по линейному закону

$$s = at + b,$$

где a и b — данные числа и $a \neq 0$, то это движение равномерное, потому что его скорость $s' = a$ постоянна.

Если точка движется по прямой по квадратичному закону

$$s = at^2 + bt + c,$$

где a, b и c — данные числа и $a \neq 0$, то это движение равноускоренное, так как его скорость $s' = 2at + b$ зависит от времени, а ускорение $s'' = 2a$ постоянно.

Подчеркнем, что если точка движется по прямой по закону $s = f(t)$, то s' и s'' есть функции времени. Только в случае если точка движется по прямой по линейному закону, s' есть постоянная, т. е.

движение равномерное, и только если точка движется по прямой по квадратичному закону, s'' есть постоянная, не равная нулю, т. е. движение равноускоренное.

5.62 а) Что называют второй производной функции $f(x)$? Как ее обозначают?
б) Как находят производные высших порядков?

5.63° а) Какое движение в механике называют равномерным; равноускоренным?
б) В чем заключается механический смысл второй производной?
в) Точка движется по прямой по закону $s(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$. Какой механический смысл имеют числа a, v_0, s_0?

5.64 Точка движется по прямой по закону $s(t)$. Выразите скорость v точки и ее ускорение a как функцию времени t. Определите v и a в момент времени t, если:
а) $s(t) = 5t^2 - 10t + 1$, $t = 0$, $t = 2$, $t = 4$;
б) $s(t) = 2t^2 - 8t + 1$, $t = 0$, $t = 1$, $t = 5$;
в) $s(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$, $t = 0$, $t = 2$, $t = 3$.
Определите в каждом случае момент времени, когда скорость точки равна нулю.

5.65* Пусть при прямолинейном движении тела его координата x (в метрах) меняется по закону:
а) $x(t) = 5t + \sin 3t - 2\cos\frac{t}{2}$; б) $x(t) = 3t - \cos 2t + 3\sin\frac{t}{3}$,
где t — время (в секундах), $t \geqslant 0$. Найдите начальную скорость и начальное ускорение тела.

5.66 Найдите $f''(x)$, если:
а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$;
в) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 13$; г) $f(x) = -13x^5 + 4x^3 - x$.

5.67* Найдите производные порядков 1, 2, 3 функции
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \geqslant 2.$$
Запишите полученный результат для $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

5.68 Найдите производную порядка 200 функции:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = e^x$.

5.69* Найдите производные порядков n и $(n - 1)$ функции
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \geqslant 2.$$

5.70* Найдите производную порядка n функции:

а) $f(x) = (x + 2)^n$; б) $f(x) = e^x$;

в) $f(x) = 3^x$; г) $f(x) = (x - 2)^n$.

Докажите полученные формулы с помощью метода математической индукции.

5.71* Найдите производную порядка n функции

$$f(x) = (x + a)^m, \text{ где } m \in N,\ m > n.$$

5.7*. Выпуклость графика функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, имеющую на интервале $(a; b)$ вторую производную $f''(x)$.

Вторая производная функции $f(x)$ есть первая производная функции $f'(x)$, поэтому:

1) если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то первая производная $f'(x)$ на этом интервале возрастает;

2) если $f''(x) < 0$ на интервале $(a; b)$, то первая производная $f'(x)$ на этом интервале убывает.

На рисунках 113—115 изображены графики функций, соответствующие случаю 1.

Объясним это. Для каждого из этих трех графиков при возрастании x от a до b тангенс угла между касательной к графику функции и осью Ox возрастает. На рисунке 113 угол α острый для всех значений x из интервала $(a; b)$; с возрастанием x угол α увеличивается и его тангенс (положительный) увеличивается. На рисунке 114 угол α тупой; с возрастанием x угол α увеличивается и его тангенс (отрицательный) увеличивается. Наконец, на рисунке 115 тангенс сначала растет, принимая отрицательные значения на интервале $(a; c)$, обращается в нуль в точке $x = c$, а затем растет, принимая положительные значения на интервале $(c; b)$.

Так как в любой точке $x \in (a; b)$ имеем $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, то рост тангенса

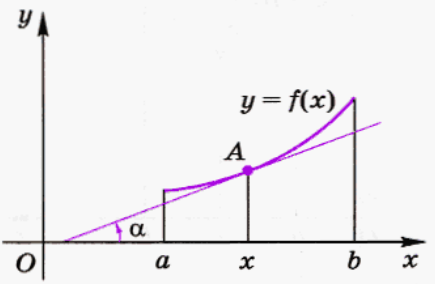


Рис. 113

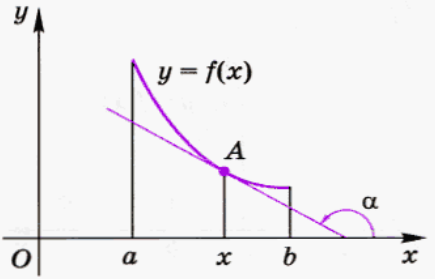


Рис. 114

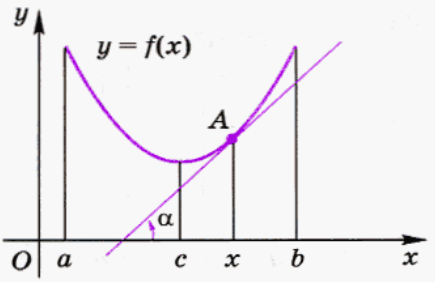


Рис. 115

угла α означает, что на интервале $(a; b)$ функция $y = f'(x)$ возрастает. Возрастание же первой производной, т. е. возрастание $\operatorname{tg}\alpha$, вызвано тем, что вторая производная функции f положительна на интервале $(a; b)$.

Во всех трех рассмотренных случаях график расположен выше касательной, проведенной в любой его точке.

График функции называют **выпуклым вниз** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой его точке интервала $(a; b)$. На рисунках 113—115 изображены графики функций, выпуклые вниз.

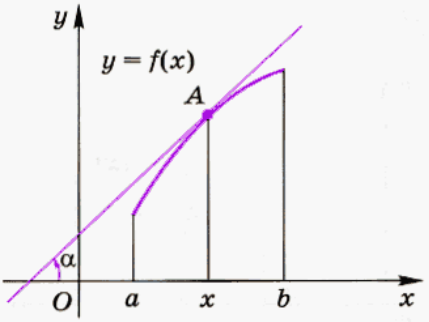


Рис. 116

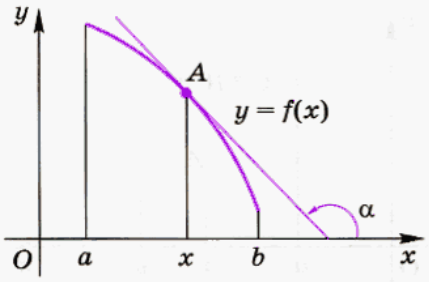


Рис. 117

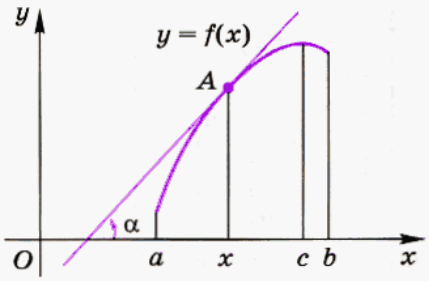


Рис. 118

График функции называют **выпуклым вверх** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой его точке интервала $(a; b)$. На рисунках 116—118 изображены примеры графиков функций, выпуклых вверх.

Справедливо утверждение 1, выражающее **геометрический смысл второй производной: если функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$ имеет положительную вторую производную $f''(x)$, то на этом интервале график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость вниз; если же функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную $f''(x)$, то на этом интервале график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость вверх.**

В случае 1 это утверждение уже разъяснено, а в случае 2 его разъяснение следует из рассмотрения графиков на рисунках 116—118.

Справедливо утверждение 2. **Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную $f''(x)$. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум. Если же $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.**

Справедливость утверждения 2 следует из доказанной ниже теоремы, если учесть, что из того, что вторая производная отрицательна в точке x_0, в силу предположения о ее непрерывности следует, что она отрица-

тельна в некоторой окрестности этой точки. Из того что вторая производная положительна в точке x_0, в силу ее непрерывности также следует, что она положительна в некоторой окрестности этой точки.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ и пусть первая производная этой функции в точке x_0 равна нулю: $f'(x_0) = 0$. Тогда:

а) если $f''(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный минимум;

б) если $f''(x) < 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум.

Доказательство.

а) Пусть $f''(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и $f'(x_0) = 0$. Так как вторая производная есть первая производная от первой производной: $f''(x) = (f'(x))'$, то на основании теоремы (п. 5.5) функция $f'(x)$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ возрастает, но $f'(x_0) = 0$, поэтому $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, т. е. первая производная при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+». Но это означает, что функция f в точке x_0 имеет локальный минимум.

б) Подобным образом доказывается теорема и в случае $f''(x) < 0$, приводящем к локальному максимуму в точке x_0.

Говорят, что точка x_0 есть **точка перегиба** кривой — графика функции $y = f(x)$, если существует достаточно малое $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ кривая находится по одну сторону касательной к кривой в точке с абсциссой x_0, а для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ — по другую. Иными словами, если при переходе x через x_0 точка кривой переходит с одной стороны касательной на другую.

Если функция $f(x)$ в каждой точке окрестности точки x_0 (включая и точку x_0) имеет вторую производную $f''(x)$, а в точке x_0 вторая производная меняет знак с «+» на «–» или с «–» на «+», то точка x_0 является точкой перегиба ее графика.

Чтобы найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$, надо найти вторую производную $f''(x)$ и решить уравнение

$$f''(x) = 0. \qquad (1)$$

Те корни уравнения (1), которые принадлежат интервалу $(a; b)$ и в которых вторая производная меняет знак с «+» на «–» или с «–» на «+», и являются точками перегиба графика функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР. Найдем промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2. \qquad (2)$$

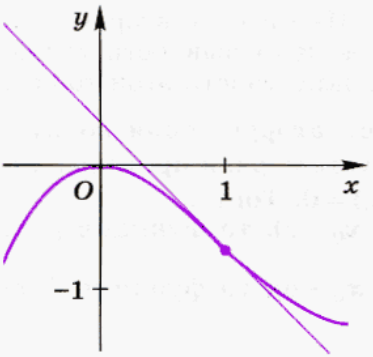


Рис. 119

Функция (2) определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Вычислим вторую производную функции (2). Так как $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)' = x^2 - 2x$, то $f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

Очевидно, что вторая производная функции (2) обращается в нуль в единственной точке $x = 1$, отрицательна на интервале $(-\infty; 1)$, положительна на интервале $(1; +\infty)$. Следовательно, точка $x = 1$ — точка перегиба графика функции (2).

На интервале $(-\infty; 1)$ график функции (2) имеет выпуклость вверх, а на интервале $(1; +\infty)$ — выпуклость вниз.

На рисунке 119 изображены график функции (2) в окрестности точки $x = 1$ и касательная, проведенная к графику в точке с абсциссой $x = 1$.

5.72° В каком случае график функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ называют: а) выпуклым вниз; б) выпуклым вверх?

5.73° Объясните, как по знаку второй производной функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ определить выпуклость вверх (вниз) графика этой функции на интервале $(a; b)$.

5.74° Объясните, как по знаку второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, определить вид локального экстремума этой функции в точке x_0.

5.75° Какую точку называют точкой перегиба кривой — графика функции $y = f(x)$? Как найти точку перегиба графика функции $y = f(x)$?

5.76 Определите промежутки выпуклости вверх (вниз), точки перегиба (если они есть) графика функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$;
в) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$; г) $f(x) = -4x^3 - 6x^2 + 7x$;
д) $f(x) = 5^x$; е) $f(x) = (0{,}5)^x$;
ж) $f(x) = \log_2 x$; з) $f(x) = \log_{0,7} x$; и) $f(x) = \sin x$;
к) $f(x) = \cos x$; л) $f(x) = \operatorname{tg} x$; м) $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

5.77 Верно ли, что если в некоторой точке вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, то эта точка является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$?

5.78 Определите промежутки выпуклости вверх (вниз) графика функции $y = f(x)$, если:
а) $f(x) = |x^2 - 1|$; б) $f(x) = |\sin x|$; в) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$.
Есть ли у графика этой функции точки перегиба?

5.8*. Экстремум функции с единственной критической точкой

Пусть на промежутке I с концами a и b определена функция $f(x)$. Требуется найти ее локальные экстремумы на промежутке I. Промежуток I может быть отрезком, интервалом или полуинтервалом. При этом подразумевается, что a либо действительное число, либо $-\infty$; b либо действительное число, либо $+\infty$.

Мы знаем, что внутреннюю точку x_0 промежутка I, т. е. точку, принадлежащую интервалу $(a; b)$, называют критической точкой функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ в этой точке равна нулю или не существует. С другой стороны, если в точке $x_0 \in (a; b)$ функция достигает экстремума, то производная в этой точке равна нулю или не существует, т. е. точка x_0 критическая.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I вместе со своей производной $f'(x)$. Рассмотрим случай, когда внутри промежутка I нет критических точек. Тогда производная $f'(x)$ на интервале $(a; b)$ должна иметь один и тот же знак, так как если бы в двух разных точках x_1 и x_2 интервала $(a; b)$ производная $f'(x)$ имела бы разные знаки, то вследствие ее непрерывности между точками x_1 и x_2 нашлась бы точка c, в которой $f'(c) = 0$ (см. п. 2.5), что невозможно, так как на интервале $(a; b)$ нет критических точек.

Но если производная на всем интервале сохраняет один и тот же знак, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, если $f'(x) > 0$, или убывает на промежутке I, если $f'(x) < 0$, т. е. функция $f(x)$ строго монотонна на промежутке I.

Пусть теперь на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ и на интервале $(a; b)$ имеется единственная ее критическая точка x_0. В этом случае промежуток I делится на два промежутка — один с концами a и x_0, другой с концами x_0 и b (рис. 120).

Внутри этих промежутков критических точек нет, поэтому к ним применимы только что приведенные рассуждения.

Поскольку точка x_0 — критическая, то в ней производная равна нулю. Это возможно только в четырех случаях, они изображены на рисунках 121—124.

На рисунке 121 изображен график функции $f(x)$, имеющий единственную критическую точку x_0 на промежутке с концами a и b и в этой

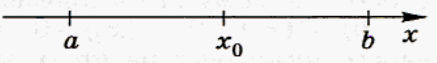


Рис. 120

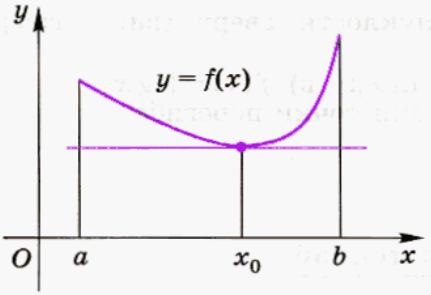


Рис. 121

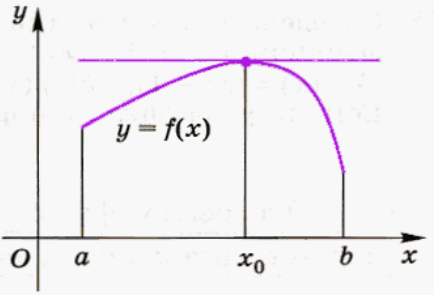


Рис. 122

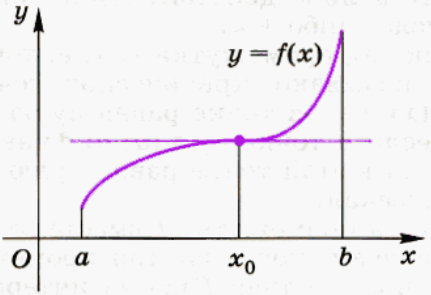


Рис. 123

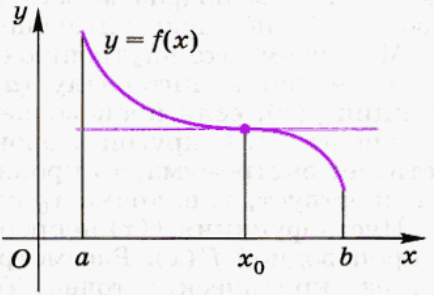


Рис. 124

точке достигается минимум на промежутке с концами a и b. При этом $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, т. е. на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, т. е. на интервале $(x_0; b)$.

На рисунке 122 изображен график функции $f(x)$, которая в точке x_0 достигает максимума на всем промежутке с концами a и b, при этом $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от нее.

На рисунках 123 и 124 изображены графики функций, у которых в точке x_0 нет ни максимума, ни минимума.

Приведенные выше рассуждения говорят о справедливости следующего утверждения 1:

Пусть на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ и x_0 — единственная точка на интервале $(a; b)$, в которой $f'(x) = 0$. Тогда если на интервале $(a; b)$ найдутся точки x_1 и x_2, такие, что $x_1 < x_0 < x_2$ и:

а) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего максимума на промежутке I;

б) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего минимума на промежутке I.

Подчеркнем, что этот экстремум единственный.

ПРИМЕР 1. Найдем максимум функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ — на интервале $(-\infty; 0)$.

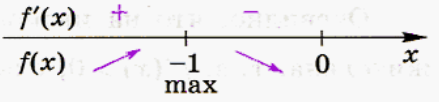


Рис. 125

Функция f определена для всех x из этого интервала. Найдем первую производную функции f:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

На интервале $(-\infty; 0)$ функция f имеет единственную критическую точку $x = -1$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль. В этой точке производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−» (рис. 125), следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет максимум на интервале $(-\infty; 0)$.

Таким образом, $\max\limits_{(-\infty;\,0)} f(x) = f(-1) = -2$.

Справедливо утверждение 2:

Пусть на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими первой и второй производными и x_0 — единственная точка на интервале $(a; b)$, в которой $f'(x) = 0$. Тогда:

а) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 есть точка минимума функции $f(x)$ на промежутке I;

б) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$ на промежутке I.

Доказательство утверждения 2 основано на утверждении 2 из п. 5.7, из которого следует, что при данных условиях в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум в случае «а» и локальный максимум в случае «б». Но так как x_0 — единственная критическая точка на промежутке I, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум в случае «а» и максимум в случае «б» на всем промежутке I.

ПРИМЕР 2. Найдем минимум функции $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ на интервале $(0; +\infty)$.

Функция $f(x)$ определена для всех $x > 0$. Вычислим первую производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2}.$$

На интервале $(0; +\infty)$ функция f имеет единственную критическую точку $x = \frac{1}{2}$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль. Вычислим вторую производную функции f:

$$f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}.$$

Очевидно, что на интервале $(0; +\infty)$ вторая производная положительна, т. е. $f''(x) > 0$, следовательно, $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума.

Таким образом, $\min\limits_{(0;\,+\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

Выше были рассмотрены случаи, когда в критической точке внутри промежутка производная равна нулю.

Если же в критической точке производная не существует, то аналогичными рассуждениями можно доказать, что справедливо утверждение 3:

Пусть на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ существует, непрерывна и отлична от нуля во всех точках интервала $(a; b)$, кроме точки x_0, в которой производная не существует. Тогда если на интервале $(a; b)$ найдутся точки x_1 и x_2, такие, что $x_1 < x_0 < x_2$ и:

а) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего максимума на промежутке I;

б) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего минимума на промежутке I.

Подчеркнем, что этот экстремум единственный.

5.79° Если на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ и x_0 — единственная ее критическая точка на интервале $(a; b)$, то как определить, достигает ли функция в этой критической точке максимума (минимума) на этом промежутке?

5.80 Если на промежутке I с концами a и b функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ существует, непрерывна и отлична от нуля во всех точках интервала $(a; b)$, кроме точки x_0, в которой производная не существует, то как определить, достигает ли функция в этой критической точке максимума (минимума) на этом промежутке?

5.81 Как с помощью второй производной определить, является ли данная критическая точка точкой максимума (минимума) на промежутке?

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на указанном промежутке **(5.82—5.85)**, если:

5.82 а) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $(0; +\infty)$; б) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $(-\infty; 0)$;

в) $f(x) = 8x^2 - \frac{1}{4x}$, $(-\infty; 0)$; г) $f(x) = 8x^2 + \frac{1}{4x}$, $(0; +\infty)$.

5.83 а) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$, $[0; \pi]$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$, $[\pi; 2\pi]$;
в) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \cos x$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

5.84 а) $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 4}$, $[0; +\infty)$; б) $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 4}$, $(-\infty; 0]$.

5.85 а) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$, $[0; +\infty)$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$, $(-\infty; 0]$.

5.86 Для каждого значения a найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x - a|$ на отрезке $[-1; 1]$.

5.87 Для каждого значения a найдите наибольшее значение функции $f(x) = |x - a|$ на отрезке $[-1; 1]$.

5.88 а) Для каждого значения b найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x - b)^2$ на отрезке $[-1; 1]$.
б) Для каждого значения b найдите наибольшее значение функции $f(x) = (x - b)^2$ на отрезке $[-1; 1]$.

5.89* Для каждого положительного значения b найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + 1}}$ на отрезке $[1; 2]$.

5.90* Для каждого отрицательного значения b найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{b - x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ на отрезке $[1; 2]$.

5.9. Задачи на максимум и минимум

ЗАДАЧА 1. Из чисел отрезка $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ найдем такое, для которого разность утроенного числа и его куба наименьшая.

Пусть x — любое число из отрезка $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$. Составим разность утроенного числа x и его куба: $3x - x^3$. Требуется найти такое число $x_0 \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$, для которого выражение $3x - x^3$ достигает наименьшего значения.

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$. Так как $f'(x) = (3x - x^3)' = -3(x - 1)(x + 1)$, то $f'(x) = 0$ в двух точках -1 и 1, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$. Функция $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ имеет две критические точки: $x = -1$, $x = 1$.

Сравним числа: $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{9}{8}$; $f(-1) = 3\cdot(-1) - (-1)^3 = -2$; $f(1) = 3\cdot 1 - 1^3 = 2$; $f(2) = 3\cdot 2 - 2^3 = -2$.

Функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ в двух точках $x = -1$ и $x = 2$ (см. п. 5.1).

Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ имеется два числа -1 и 2, для каждого из которых разность утроенного числа и его куба наименьшая.

Ответ. -1 и 2.

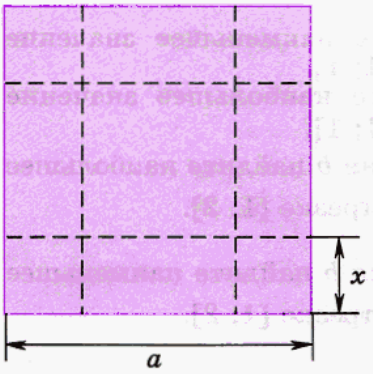


Рис. 126

ЗАДАЧА 2. Дан квадратный лист жести со стороной a см. В его углах вырезают одинаковые квадраты (рис. 126) и, загибая края по пунктирным линиям, делают коробку. Выясним, при каких размерах квадратов объем коробки будет наибольшим, и найдем этот объем.

Длину стороны каждого из вырезаемых квадратов обозначим через x см. Тогда объем коробки равен

$$V = x(a - 2x)^2 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Рассмотрим функцию

$$V(x) = x(a - 2x)^2,\ 0 < x < \frac{a}{2}.$$

Найдем точки локального экстремума функции $V(x)$ на интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$. Имеем

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Приравняв $V'(x)$ к нулю, получим два корня уравнения: $x_1 = \frac{a}{2}$ и $x_2 = \frac{a}{6}$. Из них только x_2 принадлежит интервалу $\left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Очевидно, что при переходе через точку $x_2 = \frac{a}{6}$ производная функции $V(x)$ меняет знак с «+» на «–» (рис. 127), следовательно, в точке x_2 функция достигает локального максимума на интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$.

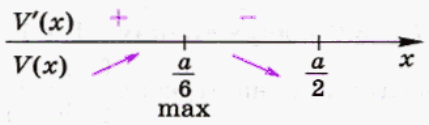


Рис. 127

Критическая точка $\frac{a}{6}$ на интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$ единственная, следовательно, по утверждению 1 из п. 5.8 она является точкой максимума на всем интервале $\left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Итак, надо вырезать квадраты со стороной $\frac{a}{6}$ см.

Объем коробки равен $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6}\left(a - \frac{2 \cdot a}{6}\right)^2 = \frac{2}{27}a^3$ (см^3).

Ответ. $\frac{a}{6}$ см, $\frac{2}{27}a^3$ см^3.

ЗАДАЧА 3. Из всех прямоугольных параллелепипедов заданного объема V, в основании которых квадрат, выберем параллелепипед, имеющий наименьшую полную поверхность.

Пусть длина стороны основания прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат, равна x ($x > 0$). Тогда высота такого параллелепипеда равна $\frac{V}{x^2}$, а полная поверхность равна

$$S = 2x^2 + 4x \cdot \frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Рассмотрим функцию $S(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x}$, $x \in (0; +\infty)$. Найдем точки локального экстремума функции $S(x)$ на интервале $(0; +\infty)$. Имеем

$$S'(x) = 4x - \frac{4V}{x^2} = 4 \cdot \frac{x^3 - V}{x^2}.$$

Приравняв $S'(x)$ к нулю, получим единственный корень уравнения: $x_0 = \sqrt[3]{V}$, т. е. интервалу $(0; +\infty)$ принадлежит единственная критическая точка $x_0 = \sqrt[3]{V}$.

Вычислим вторую производную $S''(x) = \left(4x - \frac{4V}{x^2}\right)' = 4 + \frac{8V}{x^3}$. Так как $S''(x_0) > 0$ для всех x из интервала $(0; +\infty)$, то $x_0 = \sqrt[3]{V}$ есть точка локального минимума, она единственная на интервале $(0; +\infty)$, следовательно, по утверждению 2 из п. 5.8 в ней функция $S(x)$ достигает минимума на всем интервале $(0; +\infty)$.

Это означает, что прямоугольный параллелепипед заданного объема V, в основании которого квадрат, имеет наименьшую полную поверхность, если сторона его основания равна $\sqrt[3]{V}$. Так как высота прямоугольного параллелепипеда в этом случае равна $\sqrt[3]{V}$, то указанным свойством обладает куб с ребром $\sqrt[3]{V}$.

Ответ. Указанным свойством обладает куб с ребром $\sqrt[3]{V}$. ●

5.91 Найдите два положительных числа, сумма которых равна 1, а произведение наибольшее.

5.92 а) Число 54 представлено в виде суммы трех положительных слагаемых. Первое в два раза больше второго. Какими должны быть эти слагаемые, чтобы их произведение было наибольшим?
б) Число 48 представлено в виде суммы трех положительных слагаемых. Два слагаемых равны между собой. Какими должны быть эти слагаемые, чтобы их произведение было наибольшим?

5.93 Парабола задана уравнением $y = 3 - x^2$. В нее вписан прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на оси Ox, а две вершины — на параболе (рис. 128). Определите стороны этого прямоугольника.

5.94 а) Среди всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой c найдите тот, площадь которого наибольшая.
б) Докажите, что прямоугольник с данной диагональю d имеет наибольшую площадь, если он квадрат.

5.95 Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис. 129). При каких значениях a и h площадь сечения балки будет наибольшей?

5.96 Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (см. рис. 129). При каких значениях a и h прочность балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2?

5.97 Диагональ прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, равна $3\sqrt{3}$, а высота принимает значения, принадлежащие отрезку $[1{,}5;\ 3{,}5]$. Найдите параллелепипед, имеющий наибольший объем.

5.98* Корабль K стоит в 9 км от ближайшей точки B прямолинейного берега (рис. 130). С корабля нужно послать курьера в лагерь L, находящийся на берегу и расположенный в 15 км (счи-

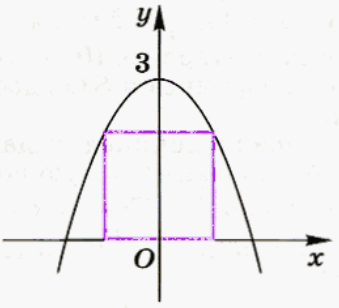


Рис. 128

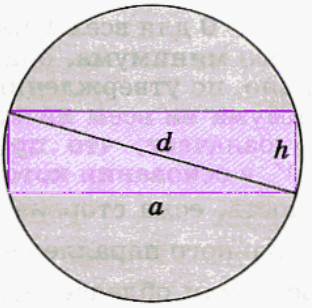


Рис. 129

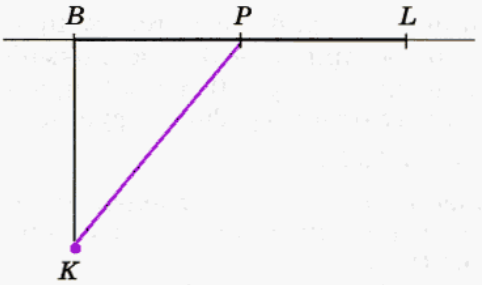


Рис. 130

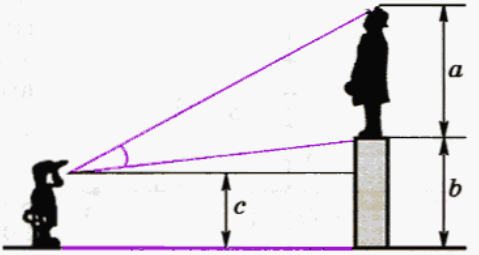


Рис. 131

тая по берегу) от точки B. В каком пункте P берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь за кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах — 4 км/ч?

5.99 На изготовление открытого бака заданного объема V в форме прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат, хотят затратить наименьшее количество металла. Какова должна быть ширина и высота бака? Решите задачу в общем виде. Получите ответ в случае, если:
а) $V = 4$; б) $V = 32$.

5.100 В некотором царстве, в некотором государстве подорожала жесть, идущая на изготовление консервных банок. Экономный хозяин фабрики рыбных консервов хочет выпускать свою продукцию в банках цилиндрической формы объемом V с наименьшими возможными затратами жести. Вычислите диаметр основания и высоту такой банки.

5.101* Статуя высотой a м возвышается на постаменте высотой b м (рис. 131). На каком расстоянии от основания статуи должен встать наблюдатель, рост которого до уровня глаз c м, $c < b$, чтобы видеть статую под наибольшим углом? Шириной постамента пренебречь. Решите задачу в общем виде, получите ответ в случае, если:
а) $a = 3$, $b = 2{,}5$, $c = 1{,}5$; б) $a = 6$, $b = 3{,}7$, $c = 1{,}7$.

5.10*. Асимптоты. Дробно-линейная функция

Нам уже встречались функции, точки графика которых при удалении в бесконечность неограниченно приближаются к некоторой прямой. Такие прямые называют **асимптотами** графика функции (от греческого слова «асимптотос» — несовпадающий). Например, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ точки графика функции $y = \frac{1}{x}$

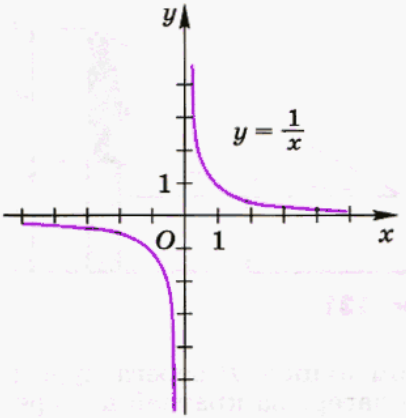


Рис. 132

неограниченно приближаются к прямой $y = 0$, а при $x \to 0$ — к прямой $x = 0$, т. е. прямые $y = 0$ и $x = 0$ являются асимптотами графика функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 132).

Далее приводятся определения наклонной, горизонтальной и вертикальной асимптот.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая график — кривую Г, и пусть прямая L задана уравнением

$$y = kx + b,$$

где k и b — некоторые числа.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(M; +\infty)$, где M — некоторое число. Если при $x \to +\infty$ расстояние от точки $A(x; f(x))$ кривой Г до точки $B(x; kx + b)$ прямой L стремится к нулю, то прямую L называют **асимптотой кривой** Г (при $x \to +\infty$).

Расстояние между точками $A(x; f(x))$ и $B(x; kx + b)$ равно $|f(x) - (kx + b)|$, поэтому если для функции $y = f(x)$ выполняется условие

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0, \qquad (1)$$

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Приведем способ вычисления коэффициентов k и b асимптоты. Если выполнено условие (1), то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - k - b \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$$

Следовательно,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Из равенства (1) также следует, что

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \qquad (3)$$

Из сказанного ясно, как найти асимптоту кривой — графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ — или доказать, что данная кривая не имеет асимптоты при $x \to +\infty$. Надо вычислить предел (2). Полученное число k и будет угловым коэффициентом асимптоты. Затем для найденного числа k надо вычислить предел (3), дающий число b. Найденные числа k и b и определяют асимптоту $y = kx + b$ данной кривой при $x \to +\infty$.

Но не всегда эти пределы существуют. Если не существует хотя бы один из пределов (2) и (3), то у графика функции $y = f(x)$ нет асимптоты (при $x \to +\infty$).

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$ для кривой — графика функции $y = f(x)$, непрерывной на интервале $(-\infty; N)$, где N — некоторое число. Если выполнено условие

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

то прямую $y = kx + b$ называют асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$. Коэффициенты k и b можно вычислить следующим образом:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad (2')$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx). \qquad (3')$$

Если не существует хотя бы один из пределов (2′) и (3′), то у графика функции $y = f(x)$ нет асимптоты (при $x \to -\infty$).

Если $k \neq 0$, то асимптоту $y = kx + b$ называют **наклонной**. Если $k = 0$, то асимптоту $y = kx + b$ называют **горизонтальной**.

Отметим, что если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad (4)$$

где b — конечное число, то тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = b \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (4) у графика функции $y = f(x)$ есть горизонтальная асимптота $y = b$ при $x \to +\infty$.

Аналогично если существует предел

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b,$$

где b — конечное число, то тогда у графика функции $y = f(x)$ есть горизонтальная асимптота $y = b$ при $x \to -\infty$.

ПРИМЕР 1. Выясним, есть ли наклонные и горизонтальные асимптоты у графика функции $y = e^{-x}$.

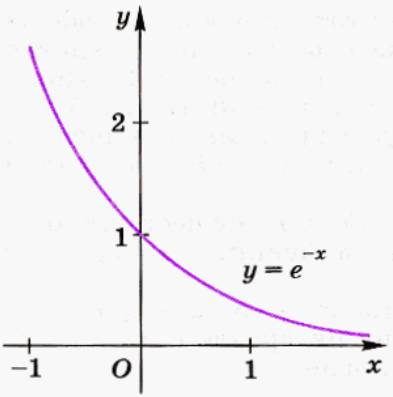


Рис. 133

Для этого вычислим пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x \cdot x} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} - 0 \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{-x} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty,$$

т. е. при $x \to +\infty$ имеем $k = 0$, $b = 0$ и уравнение асимптоты имеет вид $y = 0$ (это горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$). Наклонных асимптот у графика этой функции нет, так же как нет и горизонтальной асимптоты при $x \to -\infty$ (рис. 133).

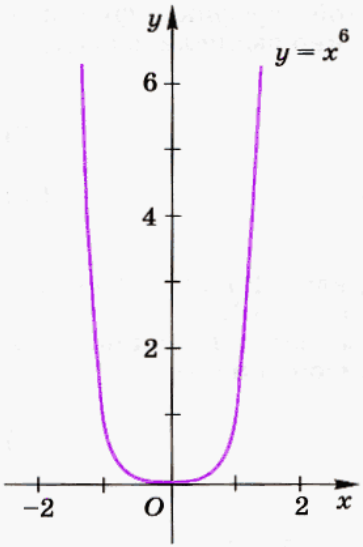


Рис. 134

ПРИМЕР 2. Выясним, есть ли наклонные или горизонтальные асимптоты у графика функции $y = x^6$.

Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^6}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^6}{x} = -\infty$, то у графика этой функции нет ни горизонтальной, ни наклонной асимптот (рис. 134).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$ и если

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty,$$

то говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(c; d)$ и если

$$\lim_{\substack{x \to d \\ x < d}} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{\substack{x \to d \\ x < d}} f(x) = -\infty,$$

то говорят, что прямая $x = d$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР 3. Найдем вертикальные асимптоты графика функции $y = \log_2(x + 3)$.

График этой функции имеет вертикальную асимптоту $x = -3$, так как эта функция непрерывна на интервале $(-3; +\infty)$ и

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \log_2(x + 3) = -\infty.$$

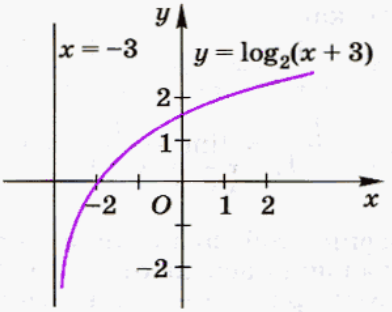


Рис. 135

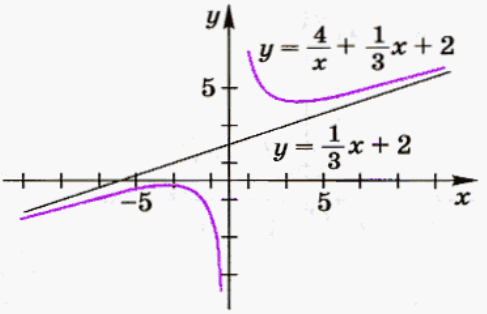


Рис. 136

Других вертикальных асимптот у графика этой функции нет (рис. 135).

ПРИМЕР 4. Выясним, есть ли асимптоты у графика функции $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2$.

Для этого сначала вычислим пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{3}x \right) = 2.$$

Аналогично $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2}{x} = \frac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{3}x \right) = 2.$

Таким образом, $k = \frac{1}{3}$, $b = 2$ и $y = \frac{1}{3}x + 2$ — уравнение наклонной асимптоты (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$).

Так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2 \right) = +\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{3}x + 2 \right) = -\infty$, то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика этой функции и других вертикальных асимптот нет (рис. 136).

ПРИМЕР 5. Найдем асимптоты графика функции

$$y = \frac{1}{|x + 1|}.$$

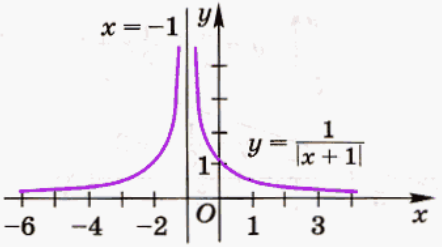


Рис. 137

Так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x+1|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x+1|} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{|x+1|} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1}{|x+1|} = +\infty,$$

то график этой функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$) и вертикальную асимптоту $x = -1$ и других асимптот не имеет (рис. 137).

Замечание. Определение вертикальной асимптоты отличается от определений наклонной и горизонтальной асимптот. Однако если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на интервале $(a; b)$, то тогда зависимость $y = f(x)$ можно задать в виде $x = \varphi(y)$, где φ — функция, обратная к f. Прямая $x = a$ будет асимптотой графика функции $x = \varphi(y)$ в смысле определения горизонтальной асимптоты (только с заменой x на y и y на x).

В качестве еще одного примера функций, графики которых имеют асимптоты, рассмотрим **дробно-линейные функции**. Каждая из них задается формулой

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{5}$$

где a, b, c, d — данные числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.

Эти условия существенны, так как если $c = 0$ и $ad - bc \neq 0$, то функция (5) линейная: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$.

Если $ad - bc = 0$ и $c = 0$, то функция постоянная: $y = \frac{b}{d}$.

Если же $ad - bc = 0$ и $c \neq 0$, то функция (5) определена для всех x, кроме $x = -\frac{d}{c}$, но она постоянная: $y = \frac{a}{c}$ для всех $x \neq -\frac{d}{c}$.

В случае $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$ функцию (5) можно задать формулой

$$y = \frac{k}{x - x_0} + y_0, \tag{5'}$$

где $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$. Тогда, используя описанные выше приемы, найдем, что график функции (5′) имеет горизонтальную асимптоту $y = y_0$ и вертикальную асимптоту $x = x_0$ и других асимптот не имеет. Тот же результат можно получить переносом гиперболы $y = \frac{k}{x_0}$ на x_0 вдоль оси Ox и на y_0 вдоль оси Oy.

ПРИМЕР 6. Найдем асимптоты и построим график функции $y = \dfrac{2x+5}{x+3}$.

Так как $\dfrac{2x+5}{x+3} = -\dfrac{1}{x+3} + 2$, то график этой функции можно получить переносом гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$ на 3 единицы влево и на 2 единицы вверх. Тогда новый график будет иметь асимптоты $y = 2$ и $x = -3$. Найти эти асимптоты можно и вычислениями.

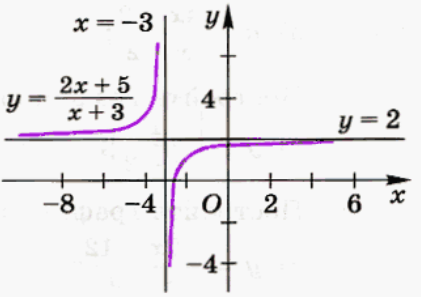


Рис. 138

Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{x+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+5}{x+3} = 2$, то у графика функции $y = f(x)$ есть горизонтальная асимптота $y = 2$ (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Так как $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{2x+5}{x+3} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \dfrac{2x+5}{x+3} = +\infty$, то у графика функции $y = f(x)$ есть вертикальная асимптота $x = -3$. Других асимптот график функции $y = f(x)$ не имеет (рис. 138).

5.102° Что называют асимптотой кривой?

5.103° Объясните, как найти асимптоты графика функции $y = f(x)$.

5.104 Найдите асимптоты графика функции:

а) $y = \dfrac{2x^2+1}{x}$; б) $y = \dfrac{2x^2-1}{x}$; в) $y = \dfrac{2x^2-5x+5}{x-2}$;

г) $y = \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}$; д) $y = \dfrac{x^2-2x+1}{3x+1}$; е) $y = \dfrac{x^2+2x+1}{2x-1}$.

5.105° Какую функцию называют дробно-линейной функцией?

5.106 Является ли дробно-линейной функция:

а) $y = \dfrac{2x+5}{10}$; б) $y = \dfrac{2}{4x+10}$; в) $y = \dfrac{2x+5}{4x}$; г) $y = \dfrac{2x+5}{4x+10}$?

Найдите асимптоты графика функции и постройте этот график **(5.107—5.109):**

5.107 а) $y = \dfrac{x-3}{x+1}$; б) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

5.108 а) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$; б) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.

5.109 а) $y = \dfrac{4x+2}{x-2}$; б) $y = \dfrac{3x-2}{2x+2}$.

5.110 Постройте график функции:

а) $y = \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$; б) $y = \dfrac{1}{|x|-2}$.

5.111 Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{-2x+12}{x-4}$; б) $y = \left|\dfrac{-2x+12}{x-4}\right|$;

в) $y = \dfrac{-2|x|+12}{|x|-4}$; г) $y = \left|\dfrac{-2|x|+12}{|x|-4}\right|$.

5.112 Дана функция $f(x) = \dfrac{-3x-1}{x+1}$. Постройте график функции:

а) $y = f(x)$; б) $y = |f(x)|$; в) $y = f(|x|)$; г) $y = |f(|x|)|$.

5.11. Построение графиков функций с применением производных

В простых случаях, как, например, при исследовании квадратичной функции или дробно-линейной функции и построении их графиков, можно обойтись без применения производной, так как свойства и графики этих функций легко получаются из свойств и графиков функций $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ и $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.

В более сложных случаях исследование функции элементарными средствами можно дополнить нахождением промежутков монотонности (возрастания и убывания), экстремумов, промежутков выпуклости графика вверх (вниз), точек перегиба и асимптот графика.

Рассмотрим примеры исследования функций и построения их графиков с применением производных.

ПРИМЕР 1. Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1 \qquad (1)$$

и построим ее график.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$ определена и непрерывна для всех x.

Так как $f(-x) = \dfrac{1}{2}(-x)^4 - 4(-x)^2 + 1 = \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1 = f(x)$, то функция (1) четная, следовательно, ее график симметричен относительно

оси Oy. На интервале $(-\infty; +\infty)$ функция имеет производную

$$f'(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x+2)(x-2).$$

Ясно, что $f'(x) = 0$ в точках $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, т. е. у функции (1) имеется три критические точки. Причем $f'(x) > 0$ на интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$, следовательно, функция (1) возрастает на промежутках $[-2; 0]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$. Функция (1) достигает своего локального максимума в точке $x = 0$ и локального минимума в двух точках $x = -2$ и $x = 2$ (рис. 139).

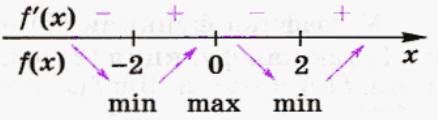


Рис. 139

Вычислим координаты нескольких точек графика:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	−2,5	−7	5,5

Построим график функции (1), учитывая проведенное выше исследование: сначала для $x \geqslant 0$, затем симметрично отразим его относительно оси Oy (рис. 140).



Рис. 140

ПРИМЕР 2. Исследуем функцию

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad (2)$$

и построим ее график.

Функция $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ определена для всех x, кроме $x = 1$ и $x = -1$, она непрерывна на каждом из интервалов

$$(-\infty; -1),\ (-1; 1) \text{ и } (1; +\infty). \qquad (3)$$

Так как $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -f(x)$, то функция (2) нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, то график функции (2) имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$).

У графика функции (2) при $x \geqslant 0$ есть вертикальная асимптота $x = 1$, так как функция (2) непрерывна на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$. Других асимптот на промежутке $[0; +\infty)$ у графика функции (2) нет.

На интервалах (3) функция (2) имеет производную

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ясно, что $f'(x) < 0$ при любом значении x из интервалов (3), следовательно, функция (2) убывает на каждом из этих интервалов, поэтому она не имеет точек локального экстремума.

Вычислим вторую производную функции (2) на каждом из интервалов (3):

$$f''(x) = \left(-\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}\right)' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль в единственной точке $x = 0$. Определим знак $f''(x)$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак $f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Вторая производная меняет знак с «+» на «−» только в одной точке $x = 0$, принадлежащей области определения функции, следовательно, график функции (2) имеет только одну точку перегиба x_0. На каждом из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ график функции (2) имеет выпуклость вверх, а на каждом из интервалов $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ — выпуклость вниз.

Вычислим координаты нескольких точек графика:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$f(x)$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$

Построим график функции (2), учитывая проведенное выше исследование: сначала для $x \geqslant 0$, затем симметрично отразим его относительно точки $O(0; 0)$ (рис. 141).

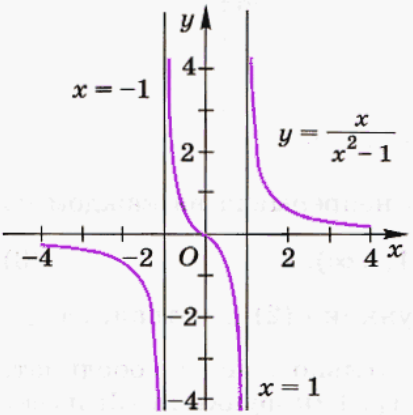


Рис. 141

ПРИМЕР 3. Исследуем функцию

$$y = \frac{4}{(x-1)^2} + x - 3 \qquad (4)$$

и построим ее график.

Функция $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x - 3$ определена для всех x, кроме $x = 1$, она непрерывна на каждом из интервалов

$$(-\infty; 1) \text{ и } (1; +\infty). \qquad (5)$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция (4) не является ни четной, ни нечетной. Выясним, есть ли у графика функции (4) наклонные и горизонтальные асимптоты. Так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x(x-1)^2} + 1 - \frac{3}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} - 3 \right) = -3,$$

и аналогично

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = -3,$$

то график функции (4) имеет наклонную асимптоту $y = x - 3$ (при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$).

У графика функции (4) есть вертикальная асимптота $x = 1$, так как функция (4) непрерывна на интервалах (0; 1) и (1; $+\infty$) и

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

Других асимптот у графика функции (4) нет.

Вычислим производную функции (4) на интервалах (5):

$$f'(x) = \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x - 3 \right)' = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1.$$

Приравняв производную к нулю, получим уравнение $\left(\frac{2}{x-1} \right)^3 = 1$, имеющее единственный корень $x = 3$. Так как производная $f'(x)$ существует в каждой точке интервалов (5), то функция (4) имеет единственную критическую точку $x = 3$.

Ясно, что $f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x-1} \right)^3 = \frac{(x-3)(x^2+5)}{(x-1)^3} > 0$ при $x > 3$ и при $x < 1$, а $f'(x) < 0$ при $1 < x < 3$.

Следовательно, функция (4) возрастает на промежутках $(-\infty; 1)$ и $[3; +\infty)$ и убывает на промежутке $(1; 3]$, в точке $x = 3$ она имеет локальный минимум.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
Знак $f'(x)$	+	–	0	+
$f(x)$	↗	↘	1	↗
			min	

Вычислим вторую производную функции (4) на каждом из интервалов (5):

$$f''(x) = \left(\frac{-8}{(x-1)^3} + 1\right)' = \frac{24}{(x-1)^4}.$$

Очевидно, что на каждом из этих интервалов $f''(x) > 0$, следовательно, на каждом из них график функции (4) имеет выпуклость вниз.

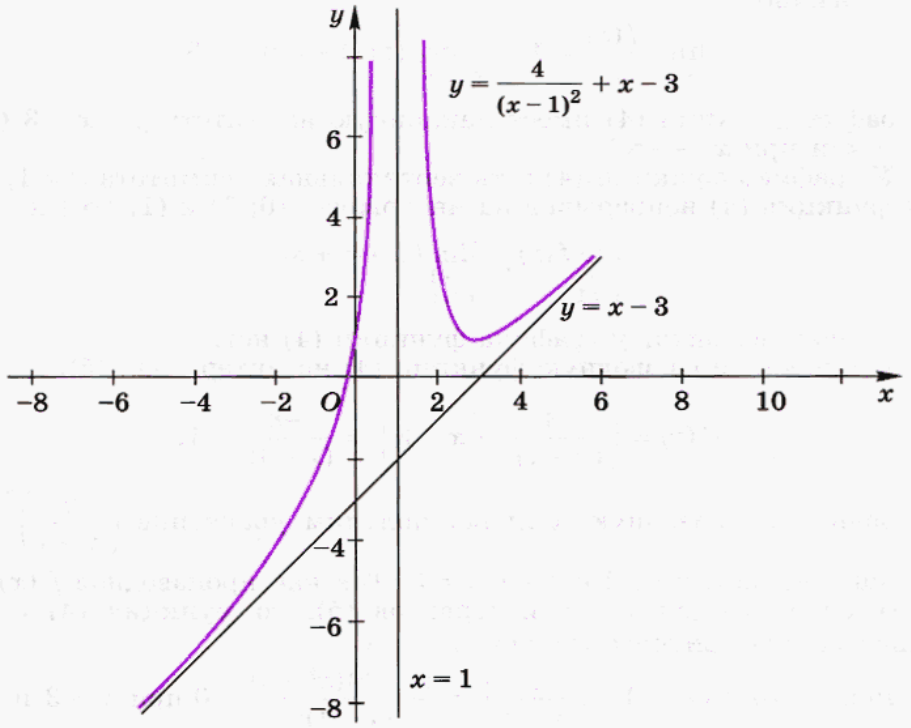


Рис. 142

Вычислим координаты нескольких точек графика:

x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	-3	1	3	1	$\frac{13}{9}$

и построим график функции (4), учитывая проведенное выше исследование (рис. 142). ●

5.113 Найдите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума функции и постройте ее график:

а) $y = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$; б) $y = 4x^2(x-2)^2$.

5.114 Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию и постройте ее график:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 1$; б) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

в) $y = -x^3 + 3x + 1$; г) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

д) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$; е) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$.

5.115 Найдите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума функции, постройте ее график. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на указанном отрезке:

а) $y = -2x^4 + 4x^2 + 3$, $[-2; 0{,}5]$;

б) $y = x^3 - 3x + 3$, $[-0{,}5; 3]$;

в) $y = (x-1)^2(2x+4)$, $[-2{,}5; 1{,}5]$;

г) $y = (2x-4)(x+1)^2$, $[-1{,}5; 2{,}5]$;

д) $y = \frac{1}{8}(x+3)(x-3)^2$, $[-2; 1]$;

е) $y = \frac{1}{4}(x-3)(x+3)^2$, $[-4; -1]$.

5.116* а) Найдите промежутки монотонности, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости вверх или вниз графика функции $y = \frac{x}{9}(4+x)^3$. Постройте график этой функции.

б) Найдите промежутки монотонности, экстремумы, асимптоты графика функции $y = \frac{1}{x^2} - 2x$ и постройте ее график.

5.117* Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = -x^2(0{,}5x^2 - 4)$; б) $y = (x^2-1)^2$;

в) $y = -x + \frac{4}{3-x} - 2$; г) $y = x + \frac{1}{x-1} - 3$;

д) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; е) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;

ж) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$; з) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

5.118* Найдите множество значений функции и постройте ее график:

а) $y = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$; б) $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3}$;

в) $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}$; г) $y = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3}$.

5.119* Найдите точки перегиба графика функции $y = \dfrac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$.

5.120 Исследуйте функцию $y = \dfrac{\ln x}{x}$ и постройте ее график. Сравните числа: а) 3^π и π^3; б) e^3 и 3^e; в) e^π и π^e.

Исследуйте функцию $y = f(x)$ и постройте ее график, если **(5.121—5.122)**:

5.121 а) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$; б) $f(x) = 6x^2e^{-x^2}$;

в) $f(x) = \sqrt{1-x^2} - 1$; г) $f(x) = \sqrt{1-x^4} + \dfrac{1}{2}$.

5.122* а) $f(x) = \dfrac{1}{|x|} + 2|x| + e^{1-|x|}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x + e^{1-|x|}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x + e^{1-x}$; г) $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

5.12*. Формула и ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в некоторой окрестности точки $x = 0$. Пусть отрезок $[0; a]$, где $a > 0$, принадлежит этой окрестности. Тогда, применяя теорему Лагранжа (см. п. 5.4), получим, что для любого $x \in [0; a]$ справедливо равенство $f(x) - f(0) = xf'(c)$, где c — некоторое число из промежутка $0 < c < x$. Это равенство можно переписать так:

$$f(x) = f(0) + xf'(c). \qquad (1)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет не только первую, но и вторую производную в некоторой окрестности точки $x = 0$. Пусть отрезок $[0; a]$, где $a > 0$, принадлежит этой окрестности. Тогда для любого $x \in [0; a]$ справедливо равенство, которое называют **формулой Тейлора**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(c)}{2}x^2, \qquad (2)$$

где c — некоторое число из промежутка $0 < c < x$.

Выведем формулу (2). Зададим x из отрезка $[0; a]$. Найдем такое число P, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + Px^2. \qquad (3)$$

Можно было бы решить это уравнение относительно P. Но нас интересует другое — мы хотим неизвестное P выразить через вторую производную от функции $f(x)$. Для этого будем рассуждать следующим образом.

Заданное значение x определяет при помощи равенства (3) число P. Введем функцию от переменной u, заданную на отрезке $[0; x]$:

$$F(u) = f(u) + f'(u)(x - u) + P(x - u)^2. \qquad (4)$$

Будем помнить, что здесь x и P фиксированы и это выражение есть функция от переменной u. Функция $F(u)$ имеет на отрезке $[0; x]$ производную, потому что по условию $f(u)$ имеет вторую производную, и, следовательно, можно найти производную не только функции $f(u)$, но и функции $f'(u)$. Кроме того, функция $F(u)$ имеет равные значения на концах отрезка $[0; x]$. Ведь $F(0) = f(0) + f'(0)\,x + Px^2 = f(x)$ (см. равенство (3)) и $F(x) = f(x)$. Поэтому согласно теореме Ролля (см. п. 5.4) существует точка c, удовлетворяющая неравенствам $0 < c < x$, в которой производная функции F равна нулю: $F'(c) = 0$.

Нам остается лишь, пользуясь формулой (4), вычислить производную $F'(u)$, равную

$$F'(u) = f'(u) - f'(u) + f''(u)(x - u) - 2(x - u)P,$$

и положить в ней $u = c$:

$$F'(c) = f''(c)(x - c) - 2(x - c)P.$$

Так как $F'(c) = 0$ и $x - c \neq 0$, то $f''(c) = 2P$, откуда $P = \dfrac{f''(c)}{2}$.

Подставляя найденное значение для P в равенство (3), получим искомую формулу Тейлора (2).

Рассуждая аналогично, можно доказать более общее утверждение. Пусть функция $f(x)$ имеет производные до порядка n включительно в некоторой окрестности точки $x = 0$ и пусть отрезок $[0; a]$, где $a > 0$, принадлежит этой окрестности. Тогда для любого $x \in [0; a]$ выполняется равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \qquad (5)$$

где $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$ $(0 < c < x)$ и c — некоторое число, зависящее от x и $n \in N$.

Это равенство называют **формулой Тейлора**. Величину R_n называют **остаточным членом формулы Тейлора**.

Заметим, что, рассуждая аналогично для функции, заданной на отрезке $[a; 0]$, где $a < 0$, принадлежащем окрестности точки $x = 0$, получим, что формулы (1), (2), (5) остаются верными при $x \in [a; 0]$, где c — некоторое число из промежутка $x < c < 0$.

Мы не знаем точно, чему равен остаток, потому что про число c известно лишь, что оно находится где-то между 0 и x. Но и этой информации бывает достаточно, чтобы формула Тейлора имела практическое значение. Практический смысл формулы Тейлора заключается в том, что в ряде случаев удается заключить, что ее остаток мал настолько, что им можно пренебречь, и тогда получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

которое дает возможность вычислить $f(x)$, если можно вычислить $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n-1)}(0)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Напишем для нее формулу Тейлора для $n = 5$. Имеем

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x;$$
$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(c) = \cos c.$$

Поэтому $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x)$, где $R_5(x) = \frac{\cos c}{5!}x^5 = \frac{\cos c}{120}x^5$ $(0 < c < x)$.

Для значений x, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$,

$$|R_5(x)| \leqslant \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < \frac{1}{400}.$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right) \tag{6}$$

с точностью до $\frac{1}{400}$.

Если в разложении $\sin x$ по формуле Тейлора взять больше членов, то получим многочлен более высокой степени, приближающий $\sin x$ еще точнее.

ПРИМЕР 2. Напишем формулу Тейлора для функции $f(x) = \cos x$ для $n = 6$. Имеем

$$f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x,\ f^{(5)}(x) = -\sin x,\ f^{(6)}(x) = -\cos x;$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1,\ f^{(5)}(0) = 0,$$
$$f^{(6)}(c) = -\cos c.$$

Поэтому $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x)$, где $R_6(x) = \frac{-\cos c}{6!} x^6$ $(0 < c < x)$.

Для $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем $|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{720} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^6 < \frac{1}{2500}$.

Таким образом,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right) \tag{7}$$

с точностью до $\frac{1}{2500}$.

ПРИМЕР 3. Напишем формулу Тейлора функции $f(x) = e^x$ для $n = 5$. Имеем

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $f^{(4)}(x) = e^x$, $f^{(5)}(x) = e^x$;
$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 1$, $f^{(4)}(0) = 1$, $f^{(5)}(c) = e^c$.

Поэтому $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x)$, где $R_5(x) = \frac{e^c}{5!} x^5$ $(0 < c < x)$.

Для $x \in [0; 1]$ имеем $|R_5(x)| \leqslant \frac{1}{40}$.

Таким образом,

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{8}$$

с точностью до $\frac{1}{40}$.

ПРИМЕР 4. Вычислим приближенно числа:

а) $\sin \frac{1}{10}$; б) $\cos \frac{1}{5}$; в) e.

а) По формуле (6) имеем

$$\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3!} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} \approx \frac{1}{10}$$

с точностью до $\frac{1}{400}$.

б) По формуле (7) имеем

$$\cos \frac{1}{5} \approx 1 - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{50} + \frac{1}{6000} \approx \frac{49}{50}$$

с точностью до $\frac{1}{2500}$.

в) По формуле (8) имеем

$$e^1 \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \approx 2{,}7$$

с точностью до $\frac{1}{40}$.

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее формально можно написать ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \qquad (9)$$

который называют **рядом Тейлора функции $f(x)$** по степеням $(x-a)$.

Для данных значений a и x он может сходиться или расходиться. Особенно важен случай, когда ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к самой функции, т. е. имеет суммой $f(x)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда стремится к нулю при $n \to +\infty$ остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \qquad (10)$$

где $S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$.

Действительно, если $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ для некоторого значения x, то из равенства (10) следует, что для этого значения x $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$, и так как $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда (9), то ряд (9) сходится и имеет своей суммой $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots. \qquad (11)$$

Обратно, если известно, что для некоторого значения x имеет место равенство (11), т. е. известно, что ряд (9) при этом значении x сходится и имеет своей суммой $f(x)$, то это означает, что для указанного значения $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$.

Но тогда из равенства (10) следует, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Можно показать, что для любых $x \in (-\infty; +\infty)$ имеют место следующие разложения в ряд Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

5.123 Напишите формулу Тейлора для функции:

а) $y = \sin x$ для $n = 7$; б) $y = \cos x$ для $n = 7$;

в) $y = \operatorname{tg} x$ для $n = 5$; г) $y = e^x$ для $n = 8$;

д) $y = \ln(1 + x)$ для $n = 5$; е) $y = \dfrac{1}{1+x}$ для $n = 5$.

5.124 Вычислите с точностью до 10^{-4} с помощью формулы Тейлора:

а) $\sin 0{,}2$; б) $\cos 0{,}1$; в) $\operatorname{tg} 0{,}1$; г) e; д) $e^{\frac{1}{2}}$; е) $\ln 2$.

§ 6. Первообразная и интеграл

6.1. Понятие первообразной

Мы знаем, что постоянное число C, рассматриваемое как функция от x, имеет производную, равную нулю для всех x. Обратное утверждение также верно: если про функцию известно, что ее производная равна нулю для всех x, то она есть постоянная.

С точки зрения механики это утверждение совершенно очевидно. В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость равна нулю: $v = f'(t) = 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s от нее до начальной точки равно постоянной при любом t. Впрочем, это утверждение следует из теоремы Лагранжа (см. п. 5.4). Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения: время тоже можно обозначать через x.

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на интервале $(a; b)$. Функцию $F(x)$ называют **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на нем производная функции F равна f:

$$F'(x) = f(x).$$

Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Нужно только под производной в точке a понимать правую производную, а в точке b — левую производную:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Очевидно, что если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, а C — фиксированная постоянная, то функция $F(x) + C$ также есть первообразная для функции $f(x)$ на том же интервале, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то они отличаются друг от друга на всем интервале $(a; b)$ на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Но тогда, как отмечалось выше, существует такая постоянная C, что $F_1(x) - F(x) = C$ на интервале $(a; b)$, откуда следует равенство (1).

Итак, мы установили важный факт: **если функция $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то и функция $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, также есть первообразная для функции $f(x)$ на этом интервале.**

ПРИМЕР 1. Из равенств

$$C' = 0;\ (x + C)' = 1;\ (x^2 + C)' = 2x;\ (\sin x + C)' = \cos x$$

следует, что функции C; $x + C$; $x^2 + C$; $\sin x + C$, где C — некоторая постоянная, являются первообразными соответственно для функций 0; 1; $2x$; $\cos x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Дадим теперь следующее определение.

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ называют некоторую ее первообразную. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначают так:

$$\int f(x)\,dx.$$

В этой записи функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а выражение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением.

Из сказанного следует, что **если функция $F(x)$ есть какая-то первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где C — некоторая постоянная.

ПРИМЕР 2. Для любых $x \in (-\infty; +\infty)$ справедливы равенства:

$$\int 1\,dx = x + C,\ \int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C\ \ (n = 2, 3, \ldots),$$
$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C\ (a \neq 0),\ \int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C\ (a \neq 0), \qquad (3)$$

где C — некоторая постоянная.

В самом деле, так как

$$x' = 1,\ \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$
$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}(a\cos ax) = \cos ax,$$
$$\left(-\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = -\frac{1}{a}(-a\sin ax) = \sin ax,$$

то функции, находящиеся в правых частях этих равенств, есть первообразные для подынтегральных функций и поэтому справедливы равенства (3).

Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(-\infty; +\infty)$, то для $k \neq 0$ справедливо равенство

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

где C — некоторая постоянная.

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot(kx+b)' = f(kx+b).$$

Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на интервале $(a; b)$ функции и A_1 и A_2 — постоянные, то имеет место равенство, выражающее **основное свойство неопределенного интеграла:**

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))\,dx = A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx + C, \qquad (4)$$

где C — некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в равенстве (4) стоит какая-то одна из первообразных для функции $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$\left(A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx\right)' =$$

$$= A_1\left(\int f_1(x)\,dx\right)' + A_2\left(\int f_2(x)\,dx\right)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x),$$

потому что интегралы $\int f_1\,dx$ и $\int f_2\,dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные для функций f_1 и f_2. Поэтому правая часть равенства (4) есть также первообразная для функции

$$A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x),$$

но тогда она отличается от левой части равенства (4) на некоторую постоянную C.

Свойство (4) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на интервале $(a; b)$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x))\,dx =$$
$$= A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + A_n \int f_n(x)\,dx + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ получаем равенства

$$\int (f_1 + f_2)\,dx = \int f_1\,dx + \int f_2\,dx + C,$$
$$\int (f_1 - f_2)\,dx = \int f_1\,dx - \int f_2\,dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\,dx = A\int f\,dx + C.$$

где C — некоторая постоянная. ●

В дальнейшем при рассмотрении неопределенных интегралов будет подразумеваться, что подынтегральная функция непрерывна на некотором интервале $(a; b)$, но писать это мы не будем.

Таблица основных неопределенных интегралов, составленная непосредственно из формул производных элементарных функций, приведена в приложении 2.

6.1° Какую функцию называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$?

Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если **(6.2—6.3)**:

6.2 а) $f(x) = 0$, $F(x) = C$; б) $f(x) = 1$, $F(x) = x$;

в) $f(x) = C$, $F(x) = Cx$; г) $f(x) = x$, $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$;

д) $f(x) = x^2$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$; е) $f(x) = x^n$, $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \in N)$.

6.3 а) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$; б) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$; г) $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = \operatorname{ctg} x$;

д) $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$.

6.4° Верно ли, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$ есть первообразная для функции $f(x)$?

Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если **(6.5—6.6)**:

6.5 а) $f(x) = (3x + 7)^{10}$, $F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(3x+7)^{11}}{11} + C$;

б) $f(x) = \cos(2x - 1)$, $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - 1) + C$;

в) $f(x) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$, $F(x) = -\frac{1}{7}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + C$.

6.6 а) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(3x + 11)}$, $F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x + 11) + C$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(-4x + 7)}$, $F(x) = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(-4x + 7) + C$;

в) $f(x) = e^{5x-2} + e^{2x-5}$, $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x-2} + \frac{1}{2}e^{2x-5} + C$.

6.7 Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x) = x$, $A(2; 0)$; б) $f(x) = x^2$, $A(3; 6)$;

в) $f(x) = x^3$, $A(-2; 3)$; г) $f(x) = \sin x$, $A\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

Найдите первообразную для функции $f(x)$, если **(6.8—6.10)**:

6.8 а) $f(x) = (5x - 2)^{20}$; б) $f(x) = \sqrt{x - 5}$; в) $f(x) = 2^x$;

г) $f(x) = 2^{3x-1}$; д) $f(x) = 3^x$; е) $f(x) = 3^{2x+7}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{4x - 2}$; з) $f(x) = \frac{1}{-5x + 2}$; и) $f(x) = \frac{5}{x - 4}$.

6.9 а) $f(x) = \frac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x^3\sqrt{x^{-5}}}{x^{-2}}$; в) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$;

г) $f(x) = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{(7x - 9)^2}$; е) $f(x) = \sqrt[4]{(5x + 1)^3}$.

6.10* а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}}$;

г) $f(x) = \frac{1}{1 + (3x)^2}$; д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + 4x^2}$.

6.11° а) Что называют неопределенным интегралом от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$?

б) Как обозначают неопределенный интеграл?

в) Как проверить правильность нахождения неопределенного интеграла?

г) В чем заключается основное свойство неопределенного интеграла?

Найдите неопределенный интеграл (6.12—6.17):

6.12 а) $\int x\,dx$; б) $\int x^2\,dx$; в) $\int x^3\,dx$; г) $\int \sin x\,dx$;
д) $\int \cos x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$; ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$; з) $\int e^x\,dx$;
и) $\int 8^x\,dx$; к) $\int \frac{dx}{x}$; л) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$; м) $\int \sqrt{x}\,dx$.

6.13 а) $\int (x + \sin x)\,dx$; б) $\int (x^2 - \cos x)\,dx$; в) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$;
г) $\int \left(x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$; д) $\int \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx$; е) $\int \left(6^x + \frac{1}{x}\right) dx$.

6.14 а) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx$;
б) $\int (10x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7)\,dx$;
в) $\int (3\sin x + 4\cos x - 5\sqrt{x})\,dx$; г) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 5e^x + 3 \cdot 2^x\right) dx$.

6.15* а) $\int \left(5\sin 2x - 3\cos\frac{x}{2}\right) dx$; б) $\int \left(\frac{5}{x+1} - e^{5x-1}\right) dx$;
в) $\int \left(\frac{3}{\sin^2(x+1)} + \frac{7}{\cos^2(x-1)}\right) dx$;
г) $\int \left(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9}\right) dx$.

6.16* а) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$; б) $\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$; в) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$;
г) $\int \sin x \cos x\,dx$; д) $\int (\sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x)\,dx$;
е) $\int (\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x)\,dx$.

6.17* а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{1 + x^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}$;
г) $\int \frac{dx}{1 + 3x^2}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (3x+1)^2}}$; е) $\int \frac{dx}{1 + (4x-1)^2}$;
ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 4x^2}}$; з) $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 10}$.

6.18* Докажите справедливость равенства:
а) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$;
б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + C$ $(-1 < x < 1)$.

6.2*. Замена переменной. Интегрирование по частям

При нахождении неопределенных интегралов нередко пользуются **методом подстановки** или **замены переменной**.

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, а функция $f(u)$ — непрерывная функция, тогда

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du + C, \text{ где } u = \varphi(x). \qquad (1)$$

Эту формулу надо понимать так. Если подынтегральное выражение в неопределенном интеграле удалось представить в виде

$$f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx,$$

то в этом интеграле можно произвести замену переменной $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$, найти первообразную $F(u)$ для функции $f(u)$, а затем заменить u на $\varphi(x)$.

Поясним формулу (1) на примере:

$$\int k\cos(kx)\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin kx + C.$$

Мы сделали подстановку $u = kx$, тогда $du = (kx)'\,dx = k\,dx$, и наш интеграл превратился в табличный.

Чтобы доказать формулу (1), найдем производную по x от ее левой части, а затем производную по x от $\int f(u)\,du$, где $u = \varphi(x)$:

$$\left(\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx\right)'_x = f(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

$$\left(\int f(u)\,du\right)'_x = \left(\int f(u)\,du\right)'_u u'_x = f(u)\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Так как производные равны, то первообразные отличаются на постоянную, что и записано в равенстве (1).

Приведем несколько примеров на применение метода подстановки.

ПРИМЕР 1. $\int e^{kx}\,dx = \int e^t \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}\int e^t\,dt = \frac{1}{k}e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$

(подстановка $kx = t$, откуда $k\,dx = dt$ и $dx = \frac{1}{k}\,dt$).

ПРИМЕР 2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

(подстановка $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, откуда $dt = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$).

ПРИМЕР 3. $\int \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int \cos(kx)\,k\,dx = \frac{1}{k}\int \cos u\,du =$
$= \frac{1}{k}\sin u + C = \frac{1}{k}\sin(kx) + C$ (подстановка $u = kx$, откуда $du = k\,dx$).

ПРИМЕР 4. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\cdot du =$
$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ (подстановка $u = 1 + x^2$, откуда $du = 2x\,dx$).

ПРИМЕР 5. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$
$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$ (подстановка $u = 1 + x^2$, откуда $du = 2x\,dx$).

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные, тогда справедливо равенство

$$\int u\,dv + \int v\,du = uv + C, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная.

Действительно, так как $dv = v'\,dx$, $du = u'\,dx$, то равенство (2) можно записать так:

$$\int uv'\,dx + \int vu'\,dx = uv + C. \tag{3}$$

Чтобы доказать формулу (3), найдем производные:

$$\left(\int uv'\,dx + \int vu'\,dx\right)' = \left(\int uv'\,dx\right)' + \left(\int vu'\,dx\right)' = uv' + vu';$$
$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Так как производные равны, то первообразные отличаются на постоянную, что и записано в равенстве (3).

Из равенства (3) получим

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C, \tag{4}$$

где C — некоторая постоянная.

Нахождение интеграла с помощью равенства (4) называют **интегрированием по частям.**

Приведем два примера применения метода интегрирования по частям:

ПРИМЕР 6. $\int x\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx + C = -x\cos x +$
$+ \sin x + C$ (здесь $u = x$, $du = dx$; $dv = \sin x\,dx$, $v = -\cos x$).

ПРИМЕР 7. $\int xe^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx + C = xe^x - e^x + C$
(здесь $u = x$, $du = dx$; $dv = e^x\,dx$, $v = e^x$).

Найдите неопределенный интеграл, используя замену переменной **(6.19—6.23)**:

6.19 а) $\int e^{3x}\,dx$; б) $\int 9^{2x}\,dx$; в) $\int \sin 7x\,dx$;
г) $\int \cos 4x\,dx$; д) $\int \sqrt{7x-2}\,dx$; е) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\,dx$.

6.20 а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$; в) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; г) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

6.21 а) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$; б) $\int 5x\sqrt{1+4x^2}\,dx$;
в) $\int x\sqrt{4+x^2}\,dx$; г) $\int x\sqrt{9+x^2}\,dx$.

6.22 а) $\int \frac{4x\,dx}{1+x^2}$; б) $\int \frac{2x\,dx}{1+4x^2}$; в) $\int \frac{x\,dx}{1+9x^2}$; г) $\int \frac{x\,dx}{4+x^2}$.

6.23* а) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$;
в) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$; г) $\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$.

Найдите неопределенный интеграл, используя интегрирование по частям **(6.24—6.25)**:

6.24 а) $\int x\cos x\,dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; г) $\int x\sqrt{x-7}\,dx$.

6.25* а) $\int x^2 e^x\,dx$; б) $\int x^2 \sin x\,dx$; в) $\int x^2 \cos x\,dx$.

6.3. Площадь криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a; b]$. График ее изображен на рисунке 143. Поставим задачу определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой — графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$, и вычислить площадь этой фигуры, называемой **криволинейной трапецией**.

Поставленную задачу естественно решать так. Произведем разбиение отрезка $[a; b]$ на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad (1)$$

выберем на каждом из частичных отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ по произвольной точке c_j и составим сумму

$$S_n = f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

где $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

Эта сумма, очевидно, равна сумме площадей закрашенных прямоугольников (см. рис. 143).

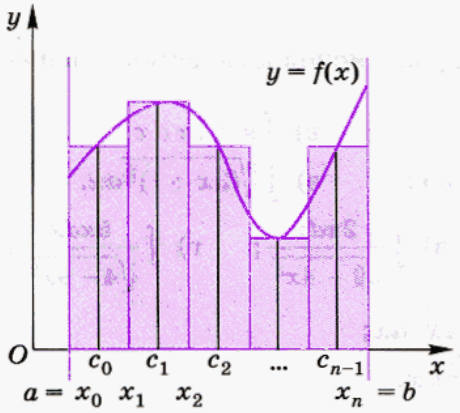


Рис. 143

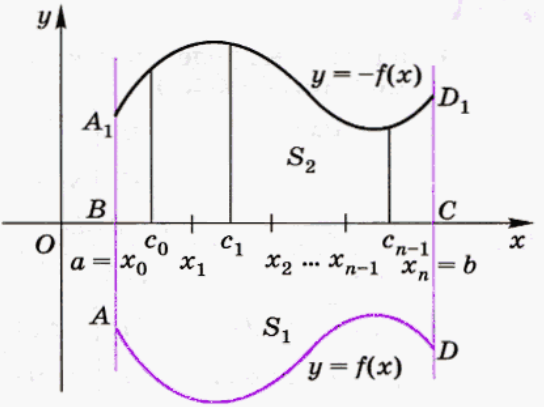


Рис. 144

Устремим теперь все Δx_j к нулю, неограниченно увеличивая n ($n \to +\infty$), и притом так, чтобы длина самого большого частичного отрезка разбиения стремилась к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способа разбиения (1) и выбора точек c_j на частичных отрезках, то величину S называют **площадью** данной **криволинейной трапеции**. Итак,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}).$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на отрезке $[a; b]$ (рис. 144).

Рассмотрим функцию $y = -f(x)$. Она непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Криволинейные трапеции A_1BCD_1 и $ABCD$, ограниченные соответственно кривыми $y = -f(x)$ и $y = f(x)$, а также осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, симметричны относительно оси Ox. Поэтому естественно считать, что трапеция $ABCD$ имеет площадь S_1, равную площади S_2 трапеции A_1BCD_1, т. е.

$$S_1 = S_2 = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (-f(c_0)\Delta x_0 + (-f(c_1))\Delta x_1 + \ldots + (-f(c_{n-1}))\Delta x_{n-1}) =$$

$$= -\lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}).$$

Сумму

$$S_n = f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1} \qquad (2)$$

называют **интегральной суммой**.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции, расположенной:

а) над отрезком $[a; b]$ оси Ox, есть предел интегральной суммы S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$;

б) под отрезком $[a; b]$ оси Ox, есть взятый со знаком «минус» предел интегральной суммы S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$.

6.26 а) Что называют криволинейной трапецией?
б) Что такое интегральная сумма?
в) Как вычисляют площадь криволинейной трапеции с помощью интегральных сумм?

6.27 Рассмотрим функцию $y = x$ на отрезке $[0; 1]$. Разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей и в качестве интегральной суммы возьмем $S_n = f(0) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} =$

$$= \left(\underbrace{0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} \right) \cdot \frac{1}{n}.$$

а) Вычислите интегральную сумму: S_1; S_2; S_3; S_4 (рис. 145).

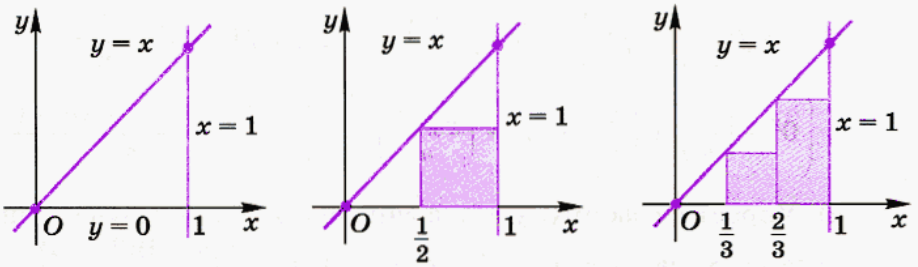


Рис. 145

б) Упростите формулу для вычисления S_n.
в) Имеет ли последовательность интегральных сумм S_1, S_2, S_3, ..., S_n ... предел при $n \to +\infty$? Если имеет, то чему он равен?
г) Чему равна площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 0$, $x = 1$?

6.28 Рассмотрим функцию $y = -x$. Разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей и в качестве интегральной суммы возьмем

$$S_n = f(0) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \left(0 + \frac{-1}{n} + \frac{-2}{n} + \ldots + \frac{-(n-1)}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = -\left(\underbrace{0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} \right) \cdot \frac{1}{n}.$$

а) Чем отличаются интегральные суммы в заданиях **6.27** и **6.28**?

б) Чему равен предел интегральной суммы в задании **6.28**?
в) Чему равна площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = -x$, $y = 0$, $x = 1$ (рис. 146)?

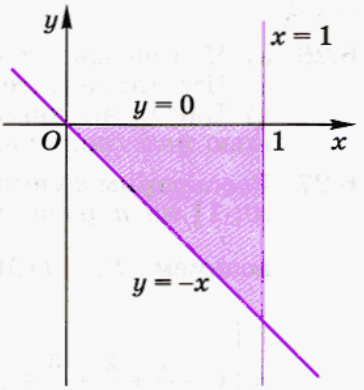


Рис. 146

6.29* а) По плану задания **6.27** вычислите интегральные суммы S_1, S_2, S_3, S_4 для функции $y = x + 1$, $x \in [0; 1]$.
б) Существует ли предел интегральной суммы S_n при $n \to +\infty$? Если да, то чему он равен?
в) Чему равна площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 1$?

6.30* Рассмотрим функцию $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$. Разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей и в качестве интегральной суммы возьмем

$$S_n = f(0) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \left(0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}.$$

а) Упростите формулу для вычисления S_n, пользуясь ранее доказанным равенством $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
б) Существует ли предел интегральной суммы S_n при $n \to +\infty$? Если да, то чему он равен?
в) Чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$?

6.4. Определенный интеграл

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a; b]$. Она может быть положительной, отрицательной или может менять знак на нем.

Рассмотрим предел интегральной суммы S_n (см. формулу (2) из п. 6.3), т. е. выражение

$$I = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}).$$

Отвлекаясь от задачи нахождения площади, можно смотреть на него как на некоторую операцию, при помощи которой по данной

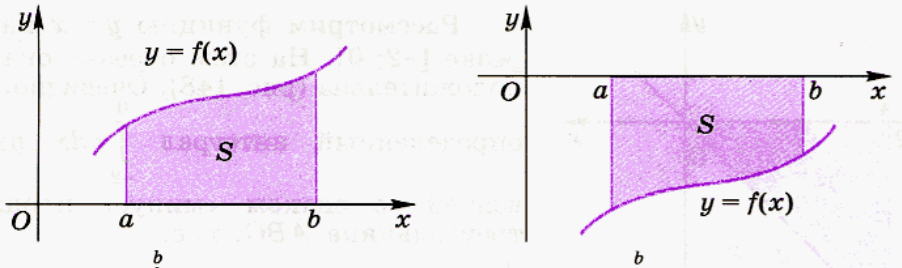


Рис. 147

функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$, определяется число I. Эту операцию называют **интегрированием функции** $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а результат этой операции называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и записывают так:

$$I = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют предел интегральной суммы, когда длина максимального частичного отрезка разбиения стремится к нулю. Число a называют нижним пределом (число b — верхним пределом) интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция интегрируема на нем.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что:

а) если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 147, *а*);

б) если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен взятой со знаком «минус» площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 147, *б*).

ПРИМЕР 1. Вычислим определенный интеграл $\int_{-2}^{0} x\,dx$, пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла.

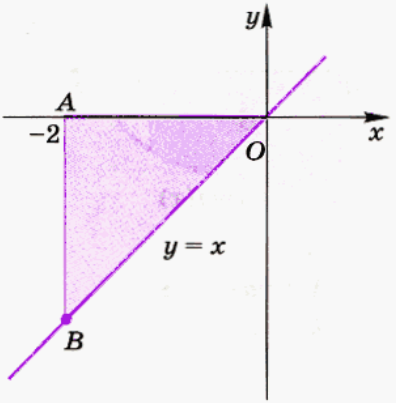


Рис. 148

Рассмотрим функцию $y = x$ на отрезке $[-2; 0]$. На этом отрезке она неположительна (рис. 148). Очевидно, что определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{0} x\,dx$ равен взятой со знаком «минус» площади треугольника ABO, т. е.

$$\int\limits_{-2}^{0} x\,dx = -S_{ABO} = -\frac{AB \cdot AO}{2} = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2.$$

ПРИМЕР 2. Вычислим определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$, пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла.

Рассмотрим функцию

$$y = \sqrt{4 - x^2}. \qquad (1)$$

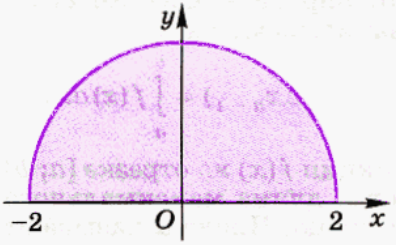


Рис. 149

Функция (1) определена на отрезке $[-2; 2]$ и принимает неотрицательные значения. Она имеет график — верхнюю половину окружности $x^2 + y^2 = 4$, а определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$ равен площади половины круга радиуса 2 (рис. 149), которую вычислим по известной из геометрии формуле $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

Итак, $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx = S = 2\pi$. ●

6.31° а) Что называют интегрированием функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

б) Как называют результат интегрирования функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$? Как его обозначают?

в) Что называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

г) В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите (6.32—6.36):

6.32 а) $\int\limits_0^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^2 (-x)\,dx$; в) $\int\limits_{-4}^0 x\,dx$;

г) $\int\limits_0^4 x\,dx$; д) $\int\limits_1^3 (1-x)\,dx$; е) $\int\limits_{-1}^1 (2x+2)\,dx$.

6.33 а) $\int\limits_2^4 (1-x)\,dx$; б) $\int\limits_0^3 (2x+1)\,dx$; в) $\int\limits_2^3 (3x-1)\,dx$.

6.34* а) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 (-\sqrt{1-x^2})\,dx$;

в) $\int\limits_{-3}^0 \sqrt{9-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_0^4 (-\sqrt{16-x^2})\,dx$.

6.35* а) $\int\limits_{-\pi}^0 \sin x\,dx + \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$.

6.36* а) $\int\limits_{-2}^2 |x|\,dx$; б) $\int\limits_0^3 |x-2|\,dx$; в) $\int\limits_0^4 ||x-2|-1|\,dx$.

6.5*. Приближенное вычисление определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и возрастает на отрезке $[a; b]$. Вычислим приближенно интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Так как функция $f(x)$ возрастает на каждом из частичных отрезков $[x_j; x_{j+1}]$, то на каждом из них в точке x_j она принимает наименьшее, а в точке x_{j+1} наибольшее значение на этом частичном отрезке.

Составим две интегральные суммы, для первой из них в качестве точки c_j возьмем точку x_j, а для второй — точку x_{j+1}:

$$\underline{S_n} = (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))\Delta x, \quad (1)$$

$$\overline{S_n} = (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))\Delta x, \quad (2)$$

где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Суммы (1) и (2) называют соответственно **нижней** и **верхней интегральными суммами.**

Так как функция $f(x)$ возрастает и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то на каждом частичном отрезке $[x_j; x_{j+1}]$ истинное значение площади S_j под графиком функции $y = f(x)$ заключено между $f(x_j)\Delta x$ и $f(x_{j+1})\Delta x$ и его можно считать приближенно равным среднему арифметическому этих чисел:

$$S_j \approx \frac{f(x_j)\Delta x + f(x_{j+1})\Delta x}{2} = \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}\Delta x. \quad (3)$$

Поэтому площадь криволинейной трапеции S, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, и равный ей интеграл I заключены между нижней и верхней интегральными суммами $\underline{S_n}$ и $\overline{S_n}$ и их можно считать приближенно равными среднему арифметическому этих сумм:

$$S = I \approx \frac{\underline{S_n} + \overline{S_n}}{2}, \quad (4)$$

или

$$S = I \approx (f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2})\Delta x. \quad (5)$$

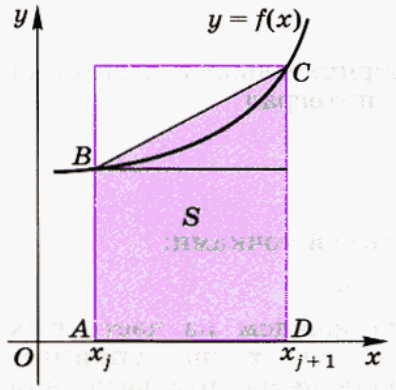


Рис. 150

При вычислении площади криволинейной трапеции на каждом частичном отрезке $[x_j; x_{j+1}]$ по формуле (3) мы фактически заменяем площадь криволинейной трапеции площадью трапеции $ABCD$ (рис. 150), поэтому описанный здесь метод приближенного вычисления интеграла называют **методом трапеций.**

Мы рассмотрели приближенное вычисление интеграла I для неотрицательной и возрастающей функции. Те же рассуждения можно провести для любой другой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$. Только следует учесть, что на каждом частичном отрез-

ке надо брать наименьшее значение функции при вычислении нижней интегральной суммы и наибольшее значение при вычислении верхней интегральной суммы.

Во всех случаях будет справедливо двойное неравенство $\underline{S_n} < I < \overline{S_n}$ и определенный интеграл можно вычислить приближенно по формуле (4).

Следует учесть также, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и неположительна, то нижняя и верхняя интегральные суммы отрицательны, но все приведенные выше рассуждения, связанные с приближенным вычислением интеграла I, сохраняют силу. Только если в этом случае мы захотим вычислить приближенно площадь криволинейной трапеции описанным методом, то надо учесть, что она равна интегралу, взятому со знаком «минус»:

$$S = -I \approx -\frac{\underline{S_n} + \overline{S_n}}{2}.$$

ПРИМЕР 1. Вычислим приближенно интеграл $\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

Для этого разобьем отрезок [0; 1] на 10 равных частей точками: $0 < 0{,}1 < 0{,}2 < \ldots < 0{,}9 < 1$ и, учитывая, что функция $y = x^2$ на отрезке [0; 1] непрерывна, неотрицательна и возрастает, составим нижнюю и верхнюю интегральные суммы:

$$\underline{S_{10}} = (0^2 + 0{,}1^2 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}9^2) \cdot 0{,}1 = 0{,}285,$$

$$\overline{S_{10}} = (0{,}1^2 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}9^2 + 1^2) \cdot 0{,}1 = 0{,}385.$$

Вычислим интеграл I по формуле (4):

$$I \approx \frac{\underline{S_n} + \overline{S_n}}{2} = 0{,}335.$$

Полученный результат отличается от точного, равного $\frac{1}{3}$, не больше чем на 0,5%.

ПРИМЕР 2. Вычислим приближенно интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

Для этого разобьем отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на 10 равных частей точками $0 < \frac{\pi}{20} < \frac{2\pi}{20} < \ldots < \frac{9\pi}{20}$ и вычислим приближенно интеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ по формуле (5), воспользовавшись таблицами значений синуса:

$$I \approx \left(\sin\frac{\pi}{20} + \sin\frac{2\pi}{20} + \ldots + \sin\frac{9\pi}{20} + \frac{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{20} \approx 0{,}998.$$

Полученный результат отличается от точного, равного 1, не больше чем на 0,2%.

6.37 Что называют:
а) нижней интегральной суммой;
б) верхней интегральной суммой?

6.38 В чем заключается метод приближенного вычисления определенного интеграла?

6.39 Вычислите приближенно определенный интеграл:
а) $\int_1^2 2x\,dx$; б) $\int_3^4 3x\,dx$.

6.40 а) В предыдущем задании вычислите определенный интеграл как площадь треугольника и сравните результаты вычислений.
б) Объясните, почему для линейной функции приближенный метод вычисления определенного интеграла дает точный результат.

6.41 Вычислите приближенно определенный интеграл:
а) $\int_1^2 x^2 dx$; б) $\int_1^2 (-x^2) dx$.

6.42 В предыдущем задании сравните результаты вычислений для функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. Объясните, почему они отличаются только знаком. Чему равна площадь криволинейной трапеции на отрезке [1; 2] в случае «а»; в случае «б»?

6.43 Вычислите приближенно определенный интеграл при заданном Δx:
а) $\int_{-1}^{1} x\,dx$, $\Delta x = 0{,}2$; б) $\int_{-1}^{1} x^3 dx$, $\Delta x = 0{,}2$;
в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$, $\Delta x = \frac{\pi}{20}$; г) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$, $\Delta x = \frac{\pi}{20}$.

6.44 Почему в предыдущем задании все определенные интегралы равны нулю?

6.6. Формула Ньютона—Лейбница

ТЕОРЕМА Ньютона—Лейбница. **Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и пусть $F(x)$ есть какая-либо ее первообразная. Тогда справедливо равенство**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой Ньютона—Лейбница.**

Обычно пишут: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

ПРИМЕР 1. $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$

ПРИМЕР 2. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$

ПРИМЕР 3. $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{-\pi}^0 = -\cos 0 - (-\cos(-\pi)) = -1 - 1 = -2.$

Результаты вычисления интегралов в примерах 2 и 3 отличаются знаком. На интервале $(0; \pi)$ функция $y = \sin x$ принимает положительные значения и $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ (рис. 151).

На интервале $(-\pi; 0)$ функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения и $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx$ есть взятая со знаком «минус» площадь

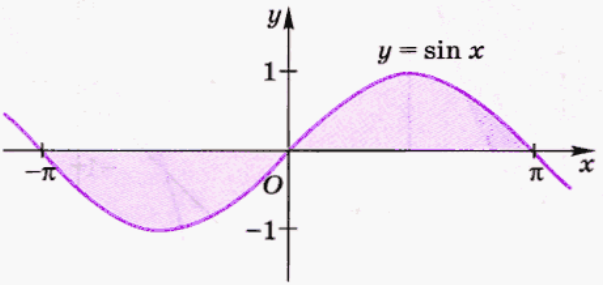


Рис. 151

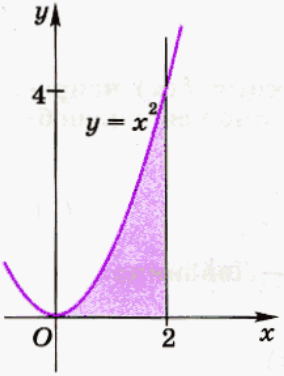


Рис. 152

криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = -\pi$.

ПРИМЕР 4. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Искомая фигура на рисунке 152 закрашена, ее площадь равна

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

ПРИМЕР 5. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x + 2$.

Сначала определим абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$, решив уравнение $x^2 = x + 2$.

Корни этого уравнения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Искомая фигура на рисунке 153 закрашена. Ее площадь вычислим как разность площадей трапеции $ABCD$ и криволинейной трапеции $ABOCD$, где $B(-1; 1)$, $C(2; 4)$. Так как

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{5}{2} \cdot 3 = 7{,}5 \text{ (кв. ед.)},$$

$$S_{ABOCD} = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ (кв. ед.)},$$

то $S = S_{ABCD} - S_{ABOCD} = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ (кв. ед.).

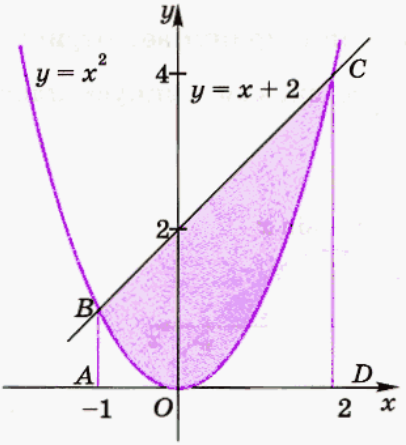


Рис. 153

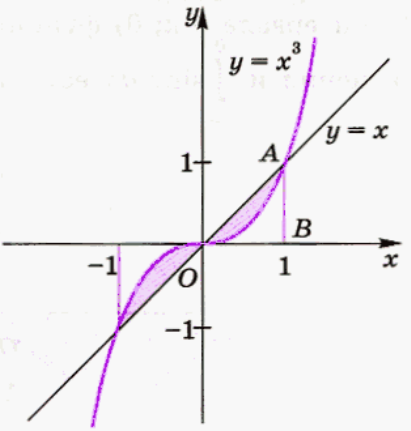


Рис. 154

ПРИМЕР 6. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^3$ и $y = x$, решив уравнение $x^3 = x$. Его корни $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Данная фигура на рисунке 154 закрашена. Так как обе функции $y = x^3$ и $y = x$ нечетные и их графики симметричны относительно начала координат, то и фигура симметрична относительно начала координат, а площади симметричных частей фигуры равны. Поэтому искомая площадь равна

$$S = 2\left(S_{OAB} - \int_0^1 x^3\,dx\right) = 2\left(\frac{OB \cdot AB}{2} - \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1 \cdot 1}{2} - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

Докажем формулу Ньютона—Лейбница. Пусть $f(x)$ есть непрерывная положительная функция на отрезке $[a; b]$ и пусть u есть произвольная точка интервала $(a; b)$ (рис. 155).

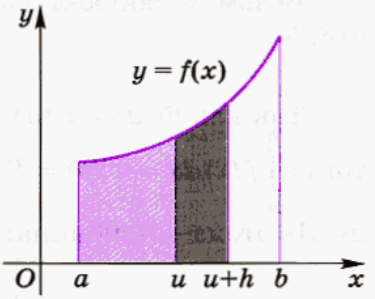


Рис. 155

Определенный интеграл

$$\Phi(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

от функции $f(x)$ на отрезке $[a; u]$ есть площадь фигуры, закрашенной сиреневым цветом. Если верхний предел интеграла есть переменная величина u, то интеграл $\Phi(u)$ есть функция верхнего предела.

В частности, $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = S$, где S — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Приращение функции Φ в точке u, соответствующее приращению h $(h > 0)$ аргумента u, есть площадь фигуры, закрашенной серым цветом:

$$\Phi(u + h) - \Phi(u) = \int_u^{u+h} f(x)\,dx.$$

Обозначим через m наименьшую ординату, а через M наибольшую ординату точек графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[u; u + h]$. Очевидно,

$$mh \leqslant \Phi(u + h) - \Phi(u) \leqslant Mh,$$

или

$$m \leqslant \frac{\Phi(u + h) - \Phi(u)}{h} \leqslant M.$$

Если h устремить к нулю, то $m \to f(u)$, $M \to f(u)$, следовательно, существует производная

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} = \Phi'(u) = f(u).$$

Мы доказали, что производная интеграла (как функции верхнего предела) равна подынтегральной функции:

$$\left(\int_a^u f(x)\,dx \right)' = f(u).$$

Подчеркнем, что это равенство верно в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна.

Таким образом, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Любая другая первообразная отличается от нее на постоянную C.

Возьмем какую-либо первообразную $F(x)$, тогда $F(x) = \Phi(x) + C$, откуда

$$\Phi(x) = F(x) - C.$$

Так как $\Phi(a) = F(a) - C$ и $\Phi(a) = 0$, то получим, что $C = F(a)$. Но тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$, и мы доказали формулу Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство формулы Ньютона—Лейбница для неположительных функций проводится аналогично.

Дадим толкование формулы Ньютона—Лейбница с физической точки зрения. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения точки по прямой, т. е. y есть координата точки в момент времени x. Тогда $F'(x) = f(x)$ — скорость этой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени от $x = a$ до $x = b$, очевидно, равен

$$S = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Термин «путь, пройденный точкой» не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь S_1, а затем влево, пройдя путь S_2, то $S = S_1 - S_2$.

Но этот путь можно вычислить иначе. Разделим промежуток времени $[a; b]$ на части точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В силу непрерывности функции $f(x)$ скорость точки на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$ можно считать приближенно постоянной, равной числу

$f(x_j)$. Тогда путь, пройденный точкой на этом отрезке времени, будет приближенно равен $f(x_j)\Delta x_j$, а весь путь будет приближенно равен сумме $f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$.

Если $\max \Delta x_j \to 0$, то эта сумма стремится к числу, равному истинной величине пути, пройденного точкой за промежуток времени $[a; b]$. В то же время это число есть, очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Но тогда из последнего равенства и равенства (2) следует равенство (1). ●

6.45° Сформулируйте теорему Ньютона—Лейбница.

Используя формулу Ньютона—Лейбница, вычислите определенный интеграл **(6.46—6.51)**:

6.46 а) $\int_0^1 x\,dx$; б) $\int_2^4 x\,dx$; в) $\int_3^7 x\,dx$.

6.47 а) $\int_0^1 x^2\,dx$; б) $\int_{-1}^1 x^2\,dx$; в) $\int_{-1}^2 x^2\,dx$.

6.48 а) $\int_0^1 x^3\,dx$; б) $\int_{-1}^1 x^3\,dx$; в) $\int_2^3 x^3\,dx$.

6.49 а) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; в) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

6.50 а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

6.51 а) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{x}$; в) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

Используя формулу Ньютона—Лейбница, вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями **(6.52—6.58)**:

6.52 а) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$; б) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$;
в) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

6.53 а) $y = x^2$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$; б) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
в) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

6.54 а) $y = x^2 - 4x + 6$ и $y = 6$; б) $y = -x^2 - 4x + 5$ и $y = 5$;
в) $y = x^2 + 1$ и $y = 3 - x$; г) $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$.

6.55 а) $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3 + 2x$; б) $y = x^2 + 2x + 5$ и $y = 5 - 2x$;
в) $y = x^2 + 2x + 4$ и $y = 4 - 2x$; г) $y = x^2 - 2x + 6$ и $y = 2x + 6$.

6.56 а) $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi$, $y = 0$;
б) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$;
в) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = 0$;
г) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$.

6.57 а) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$; б) $y = x^3$, $x = -1$, $y = 0$;
в) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

6.58* а) $y - x^2 = 0$ и $y^2 - x = 0$; б) $y - x^2 = 0$ и $y^2 + x = 0$;
в) $y = (1 - x)(x - 5)$, $y = 4$ и $x = 1$;
г) $y = (x + 1)(3 - x)$, $y = 4$ и $x = 3$.

6.59* а) Найдите ту первообразную для функции $f(x) = 2x + 4$, график которой касается прямой $y = 6x + 3$. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y = 6x + 3$ и $y = 0$.
б) Найдите ту первообразную для функции $f(x) = 2x - 2$, график которой касается прямой $y = -4x$. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y = -4x$ и $y = 0$.

6.60* Точка движется по прямой. Зависимость ее скорости от времени задана формулой $v = f(t)$. График функции v изображен на рисунке 156, *а—в*.
а) Какой физический смысл имеет площадь S фигуры, закрашенной на рисунке?

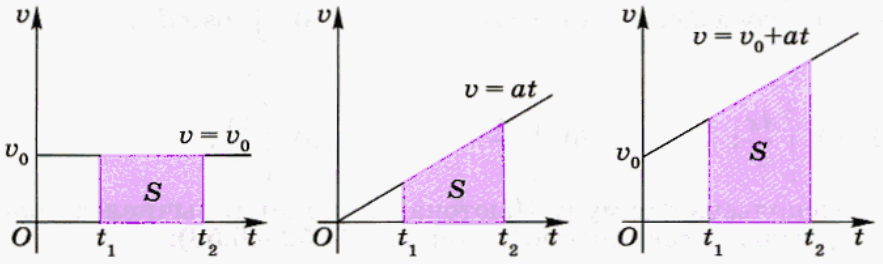


Рис. 156

б) Определите по рисунку путь, пройденный точкой за промежуток времени: $[0; t_1]$; $[0; t_2]$; $[t_1; t_2]$, считая, что 1 единица на оси Ot соответствует 1 с, 1 единица на оси Ov соответствует 1 м/с.

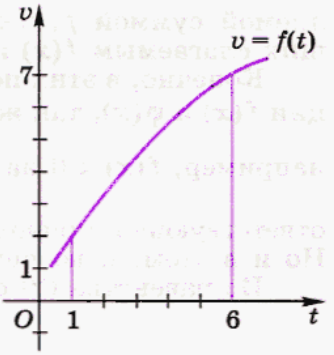


Рис. 157

6.61* В задании **6.60** определите путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[0; t]$. Верно ли, что в каждом случае площадь закрашенной фигуры равна $S(t_2) - S(t_1)$?

6.62* На рисунке 157 изображен график функции $v = f(t)$, выражающий зависимость скорости точки, движущейся прямолинейно, от времени движения.

а) Определите приближенно путь, пройденный точкой за промежуток времени от 1 до 6.

б) Каким способом в задании «а» можно получить ответ, если функция $v = f(t)$ задана формулой?

6.7. Свойства определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла выражаются формулами

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ где } A \text{ — данная постоянная}, \qquad (2)$$

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (3)$$

Свойство (1) (для случая $a < c < b$) означает, что площадь криволинейной трапеции над отрезком $[a; b]$ равна площади трапеции над отрезком $[a; c]$ плюс площадь трапеции над отрезком $[c; b]$ (рис. 158).

Свойство (2) означает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$, увеличивается в A раз ($A > 0$) для функции $Af(x)$.

Свойство (3) означает, что площадь криволинейной трапеции, опреде-

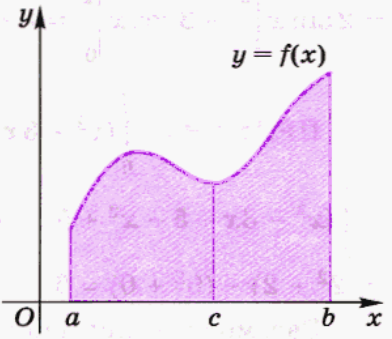


Рис. 158

ляемой суммой $f(x)+\varphi(x)$, равна сумме площадей, соответствующих слагаемым $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Конечно, в этих пояснениях мы неявно предполагали, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, так же как и число A, неотрицательные. Ведь если, например, $f(x)<0$ на $[a;\ b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком «минус». Но и в этом, и вообще в других случаях свойства (1) — (3) верны.

Из равенства (2) следует, что

$$\int\limits_a^b (-f(x))\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а из равенств (2) и (3) следует, что

$$\int\limits_a^b (Af(x)+B\varphi(x))\,dx = \int\limits_a^b Af(x)\,dx + \int\limits_a^b B\varphi(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx + B\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где A и B — данные постоянные.

Равенство (3) по индукции можно распространить на любое конечное число слагаемых.

ПРИМЕР 1. $\int\limits_0^1 (x^2-2x+1)\,dx = \int\limits_0^1 x^2\,dx - 2\int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_0^1 1\,dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 3\sin x)\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2+3 = 5.$$

ПРИМЕР 3. $\int\limits_0^2 (x^2-3x+5)\,dx - \int\limits_0^2 (x^2-5x+4)\,dx =$

$$= \int\limits_0^2 (x^2-3x+5-x^2+5x-4)\,dx = \int\limits_0^2 (2x+1)\,dx = (x^2+x)\Big|_0^2 =$$

$$= (2^2+2) - (0^2+0) = 6.$$

Рассмотрим пример вычисления площади фигуры, которую пересекает ось Ox.

ПРИМЕР 4. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 2$ и $y = x^2 - 2x - 2$.

I способ. Графики данных функций пересекаются в точках с абсциссами -1 и 2, которые найдены как решения уравнения $-x^2 + 2 = x^2 - 2x - 2$.

Графики данных функций изображены на рисунке 159, и, очевидно, сложно вычислить площадь фигуры S обычным способом. Выполним параллельный перенос графиков на 4 единицы вверх, чтобы на отрезке $[-1; 2]$ обе функции принимали положительные значения, т. е. найдем площадь равной фигуры, но ограниченной уже графиками функций $y = -x^2 + 6$ и $y = x^2 - 2x + 2$ (рис. 160).

Так как

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 6)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 6x\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 12 - \left(\frac{1}{3} - 6\right) = 15 \text{ (кв. ед.)},$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - 4 + 4 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 2\right) =$$

$= 6$ (кв. ед.), то $S = S_1 - S_2 = 15 - 6 = 9$ (кв. ед.).

II способ. Как видно из первого способа вычисления площади фигуры, эта площадь равна

$$S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 6)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)\,dx.$$

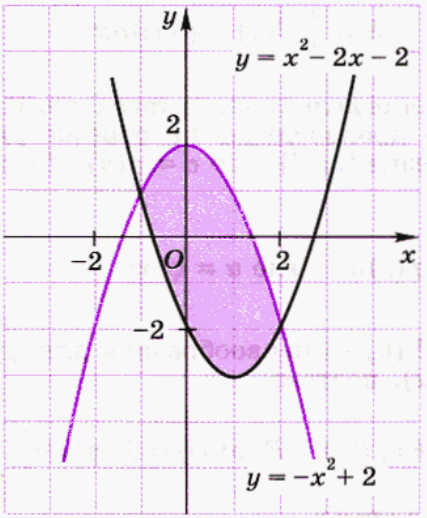


Рис. 159

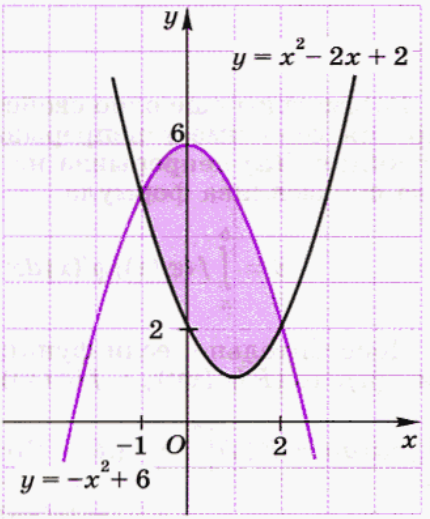


Рис. 160

Применив свойства (2) и (3) определенного интеграла, имеем

$$S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 6)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 6) - (x^2 - 2x + 2))\,dx = \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2))\,dx.$$

Таким образом, для вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 2$ и $y = x^2 - 2x - 2$, можно вычислить определенный интеграл:

$$S = \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2))\,dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4))\,dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

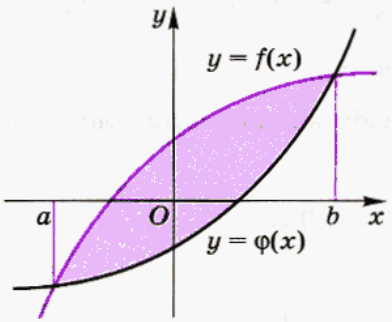


Рис. 161

Аналогичное рассуждение можно провести для функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, графики которых пересекаются в точках с абсциссами a и b $(a < b)$, если эти функции непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $f(x) > \varphi(x)$ на всем интервале $(a; b)$. В этом случае площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ (рис. 161), вычисляется по формуле

$$S = \int_{a}^{b} (f(x) - \varphi(x))\,dx.$$

Рассмотрим еще одно свойство определенных интегралов. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$, а функция $f(u)$ непрерывна на отрезке $[c; d]$, где $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$, тогда справедлива формула

$$S = \int_{a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{c}^{d} f(u)\,du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Действительно, если функция $F(u)$ — первообразная для функции $f(u)$, то $(F(\varphi(x)))'_x = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, поэтому

$$\int_{c}^{d} f(u)\,du = F(u)\Big|_{c}^{d} = F(d) - F(c) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\varphi(x))\Big|_{a}^{b} =$$

$$= \int_{a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

ПРИМЕР 5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

(подстановка $u = 2x$, откуда если $x = 0$, то $u = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}$, то $u = \pi$).

6.63 Каковы основные свойства определенных интегралов?

Примените основные свойства интегралов при вычислении интегралов **(6.64—6.66)**:

6.64 а) $\int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_1^3 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$;

в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} + \int\limits_2^e \frac{dx}{x}$; г) $\int\limits_0^1 e^x\,dx + \int\limits_1^2 e^x\,dx + \int\limits_2^3 e^x\,dx$;

д) $\int\limits_0^1 \sin x\,dx + \int\limits_1^2 \sin x\,dx + \int\limits_2^{\pi} \sin x\,dx$.

6.65 а) $\int\limits_2^3 3x\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^2 (-2x^4)\,dx$; в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{2x}$.

6.66 а) $\int\limits_1^2 (3x-1)\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^3 (x^2-2x)\,dx$;

в) $\int\limits_0^2 (2x^2+5x-6)\,dx$; г) $\int\limits_{-2}^1 (-2x^2-x+8)\,dx$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями **(6.67—6.71)**:

6.67 а) $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 1$, $x = 3$ и $y = 0$; б) $y = \sqrt{2x}$, $x = 1$ и $y = 0$.

6.68 а) $y = \frac{x^2}{4}$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$; б) $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

6.69 а) $y = x^2 - 5$ и $y = -0{,}5x^2 + 1$;
б) $y = x^2 - 4x + 1$ и $y = -2x^2 + 8x + 1$.

6.70* а) $y = x^2 - \pi x$ и $y = \sin x$;
б) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$.

6.71 а) $y = 4 - 0{,}5x^3$ и $y = 4 - 2x$; б) $y = 0{,}5x^3 + 8$ и $y = 2x + 8$.

6.72 а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y = 4 + 0{,}5x^2$, касательной к ней $y = 2x + 2$ и прямыми $x = 0$ и $x = 3$.
б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y = 8 - 0{,}5x^2$, касательной к ней $y = 2x + 10$ и прямыми $x = 0$ и $x = -3$.

6.73 Вычислите определенный интеграл, используя замену переменной:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$; д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+x^2}$; е) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

6.74* Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_0^{\pi} |\sin 2002x|\,dx$; б) $\int\limits_{-7}^{7} ||||x|-4|-2|-1|\,dx$.

6.8*. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах

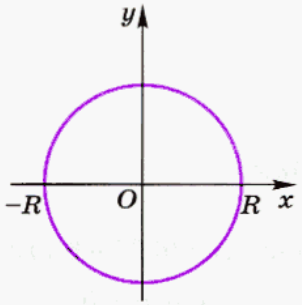


Рис. 162

ПРИМЕР 1. Площадь круга. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале системы координат xOy (рис. 162) имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, ее часть, расположенная выше оси Ox, есть график функции

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Но тогда площадь круга радиуса R равна $S = 2\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Заменим переменную в этом интеграле: $x = R\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда при возрастании переменной θ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ переменная x возрастает от $-R$ до R. При этом $\cos\theta \geqslant 0$ и $dx = R\cos\theta\,d\theta$. Поэтому получим

$$S = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}\,R\cos\theta\,d\theta = 2R^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= 2R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = 2R^2 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Итак, $S = \pi R^2$.

ПРИМЕР 2. Объем тела вращения. Пусть Γ есть график непрерывной положительной функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ в прямоугольной системе координат xOy. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (рис. 163). Произведем разбиение отрезка $[a; b]$ на части

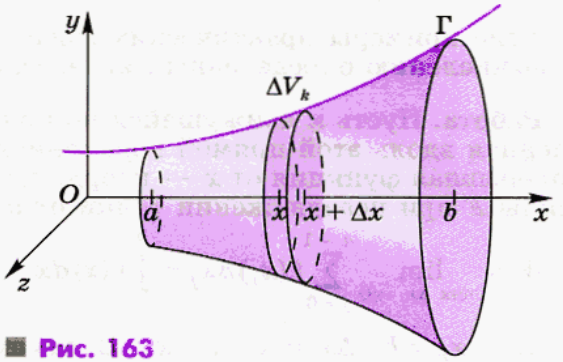


Рис. 163

точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения, ограниченный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса основания $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum\limits_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 dx,$$

и мы получим формулу для объема тела вращения

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (1)$$

В качестве примера применения формулы (1) докажем, что объем V шара радиуса R равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В самом деле, окружность радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$ имеет графиком верхнюю полуокружность Г.

Если вращать полуокружность Г вокруг оси Ox, то получим поверхность шара. Но тогда согласно формуле (1) объем шара

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

ПРИМЕР 3. Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — координаты движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности функции $f(x)$ произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на отрезке $[x_j; x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на отрезке $[a; b]$, и притом тем ближе, чем меньше наибольший из всех Δx_j.

ПРИМЕР 4. Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a; b]$ оси Ox имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция. Общая масса этого отрезка

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j)\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\, dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

ПРИМЕР 5. Работа электрического заряда. Пусть c и c_1 — два заряда, находящиеся на прямой на расстоянии r друг от друга. Сила взаимодействия F между ними направлена вдоль этой прямой и равна $F = \frac{a}{r^2}$ ($a = kcc_1$, где k — постоянная). Работу W этой силы, когда заряд c неподвижен, а заряд c_1 передвигается по отрезку $[R_1; R_2]$,

можно подсчитать, разбивая отрезок $[R_1; R_2]$ на части длины Δr_j. На каждой из них приближенно считаем силу постоянной, тогда работа на таком участке равна $\frac{a}{r_j^2}\Delta r_j$. Делая части разбиения все более короткими, убеждаемся, что работа

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a}{r_j^2} \Delta r_j = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2}\, dr \quad (0 < R_1 < R_2).$$

Этот интеграл вычисляем, принимая во внимание, что

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)', \text{ откуда } W = -\frac{a}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} = a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

В частности, работа, выполненная силой F при передвижении заряда c_1, находившегося сначала на расстоянии R_1 от заряда c, на бесконечность равна

$$W = \lim_{R_2 \to 0} a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{a}{R_1} \quad (0 < R_1).$$

ПРИМЕР 6. Давление жидкости на стенку. Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна с основанием a.

Делим высоту H на n равных малых частей Δh. Стенка разделится на «элементы» (один из них закрашен на рисунке 164). Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м на площадку, имеющую площадь 1 м^2, равно h_i тоннам.

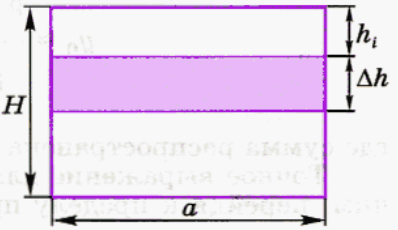


Рис. 164

Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i, равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a \Delta h$. Величина давления на стенку приближенно равна

$$P \approx \sum_{i=1}^{n-1} a h_i \Delta h = a \sum_{i=1}^{n-1} h_i \Delta h,$$

где сумма распространена на все Δh. Точное же ее выражение равно

$$P = \lim_{\Delta h \to 0} a \sum_{i=1}^{n-1} h_i \Delta h = a \int_0^H h\, dh = a\, \frac{h^2}{2}\Big|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

ПРИМЕР 7. Центр тяжести. Центр тяжести системы материальных точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_N; y_N)$ с массами m_1, m_2, ..., m_N соответственно имеет координаты

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j}, \quad y_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j y_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j}.$$

Эти формулы распространяются на непрерывно распределенные по площади массы. Роль конечных сумм играют тогда интегралы.

Найдем центр тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$ с равномерно распределенной по нему массой, ограниченного снизу осью x (рис. 165). Для этого отрезок $[-1; 1]$ оси x разделим на n равных частей длины Δx. Одна такая часть более ярко закрашена на рисунке 165. Ввиду малости Δx можно считать, что масса закрашенного элемента сегмента равна $\rho f(x_i)\Delta x = \rho y_i \Delta x$ и она сконцентрирована в точке $\left(x_i, \frac{y_i}{2}\right)$. Здесь ρ — плотность распределения массы.

Ввиду симметрии сегмента абсцисса его центра тяжести равна $x_0 = 0$. Ординату же можно приближенно записать в виде

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{y_i}{2} y_i \Delta x}{\rho \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Delta x}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x},$$

где сумма распространена на все частичные отрезки деления $[-1; 1]$.

Точное выражение для ординаты центра тяжести фигуры получим, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2 \Delta x}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\int\limits_a^b y^2 dx}{\int\limits_a^b y dx}, \qquad (2)$$

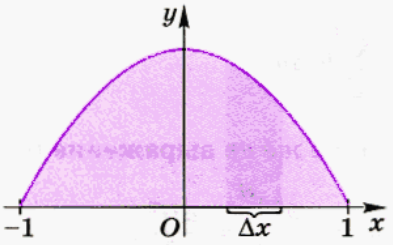


Рис. 165

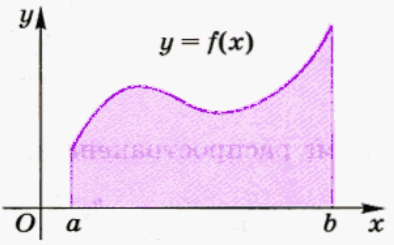


Рис. 166

где в данном случае $a = -1$, $b = 1$. Таким образом,

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx}{\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Выражение (2) можно рассматривать как общую формулу для ординаты центра тяжести фигуры, изображенной на рисунке 166, с равномерно распределенной по ней массой. Соответствующая формула для x_0 имеет вид

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b} xy\,dx}{\int\limits_{a}^{b} y\,dx}.$$

6.75 Множество точек координатной плоскости xOy, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq b)$, называют эллипсом.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом:
а) $x^2 + 9y^2 = 9$ (рис. 167); б) $4x^2 + y^2 = 4$ (рис. 168).

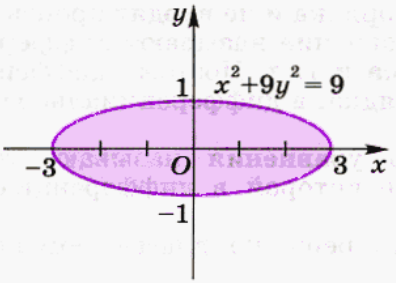


Рис. 167

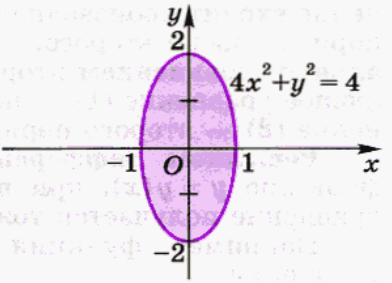


Рис. 168

6.76 Какова формула для вычисления объема тела вращения?

6.77 Используя формулу объема тела вращения, получите формулы для вычисления объемов цилиндра и конуса.

6.78 Вычислите объем тела, полученного вращением кривой — графика функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

6.79 Вычислите объем тела, полученного вращением кривой — графика функции $y = x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, вокруг оси Oy.

6.80 К движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой сила $F = f(x)$, где x — координата движу-

щейся точки. Вычислите работу силы F по перемещению точки от точки $x = a$ до точки $x = b$, если:

а) $f(x) = 2x - 1$, $a = 0$, $b = 3$; б) $f(x) = -x^2 + 4$, $a = 0$, $b = 2$.

6.81 Плотность стержня на отрезке $[a; b]$ есть функция $\rho(x)$ координаты x ($a \leqslant x \leqslant b$). Вычислите массу стержня, если:

а) $\rho(x) = x + 1$, $a = 0$, $b = 2$; б) $\rho(x) = 0{,}3x^2$, $a = 0$, $b = 3$.

6.9*. Понятие дифференциального уравнения

При решении многих задач, прежде всего физических, встречаются уравнения, в которых неизвестной является некоторая функция.

Уравнения, в которые входят производные искомой функции, называют **дифференциальными уравнениями**. Например, уравнения

$$y + 16y' - x^5 = 0, \quad (1)$$

$$3x^2 = y'' - y' \quad (2)$$

являются дифференциальными уравнениями, так как в них надо найти функцию $y = y(x)$ и в этих уравнениях содержатся производные этой функции.

Если в дифференциальное уравнение входит производная только первого порядка, то такое уравнение называют **дифференциальным уравнением первого порядка**. Если в дифференциальное уравнение входит производная второго порядка и не входят производные порядка выше второго, то такое уравнение называют **дифференциальным уравнением второго порядка** и т. д. Поэтому дифференциальное уравнение (1) — первого порядка, а дифференциальное уравнение (2) — второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называют любую функцию $y = y(x)$, при подстановке которой в дифференциальное уравнение получается тождество.

Например, функция $y = x^2$ есть решение дифференциального уравнения

$$y' = 2x. \quad (3)$$

Действительно,

$$y'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Отметим, что любая функция вида

$$y = x^2 + C, \quad (4)$$

где C — некоторая постоянная, также является решением дифференциального уравнения (3), так как $y'(x) = (x^2 + C)' = 2x$. Никакая другая функция не является решением уравнения (3).

Функцию (4) называют **общим решением дифференциального уравнения** (3). Давая C какие-либо значения, будем получать **частные решения дифференциального уравнения** (3).

Так, функции $y = x^2$, $y = x^2 + 14$, $y = x^2 - 200$ (при $C = 0$, $C = 14$ и $C = -200$ соответственно) являются частными решениями дифференциального уравнения (3).

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = \varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная на всей оси элементарная функция.

Ясно, что решением уравнения (5) будет любая первообразная для функции $\varphi(x)$:

$$y = \int \varphi(x)\,dx = F(x) + C, \tag{6}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции φ, а C — некоторая постоянная, и никакая другая функция не является решением уравнения (5).

В рассмотренном выше примере $\varphi(x) = 2x$, и поэтому по формуле (6) общее решение дифференциального уравнения (3) действительно выражается формулой (4).

Формула (6) выражает общее решение дифференциального уравнения (5), отдельные частные решения уравнения (5) получаются, если постоянной C придавать различные значения.

Если дано дифференциальное уравнение $y'' = \varphi(x)$, то его общее решение всегда можно найти так, как показано в следующем примере.

ПРИМЕР 1. Найдем общее решение уравнения

$$y'' = 6x. \tag{7}$$

Обозначим $y' = z$, тогда уравнение (7) можно переписать в виде $z' = 6x$. Его решение есть функция $z = \int 6x\,dx = 3x^2 + C_1$, где C_1 — некоторая постоянная.

Так как функция $z = y'$, то получаем уравнение $y' = 3x^2 + C_1$. Его решение, а значит и решение уравнения (7), есть функция

$$y = \int (3x^2 + C_1)\,dx = x^3 + C_1x + C_2, \tag{8}$$

где C_2 — некоторая постоянная.

Итак, общее решение уравнения (7) есть функция

$$y = x^3 + C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, которые можно задавать независимо друг от друга.

Давая C_1 и C_2 какие-либо значения, будем получать частные решения уравнения (7). Например, функции $y = x^3$, $y = x^3 - 100$, $y = x^3 - 8x$, $y = x^3 + 10x + 15$ являются частными решениями уравнения (7).

Как видно из рассмотренных примеров, дифференциальное уравнение имеет бесконечно много частных решений. Для нахожде-

ния какого-либо конкретного частного решения надо задать дополнительные условия.

Например, найдем частное решение уравнения (3), т. е. функцию $y = y(x)$, такую, чтобы точка $O(0; 0)$ принадлежала графику этой функции. Подставляя в равенство (4) координаты точки O, получим, что $C = 0$, т. е. искомое частное решение есть функция $y = x^2$.

Найдем частное решение уравнения (7), т. е. функцию $y = y(x)$, такую, что $y(0) = 0$, $y(1) = 2$.

Из равенства (8) следуют равенства $y(0) = 0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2$; $y(1) = 2 = 1 + C_1 \cdot 1 + C_2$, откуда $C_2 = 0$, $C_1 = 1$. Следовательно, искомое частное решение есть функция $y = x^3 + x$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' \cdot \varphi(y) = f(x), \tag{9}$$

которое является частным случаем **дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными**.

Покажем, как можно найти общее решение уравнения (9). Учитывая, что $y = y(x)$ есть функция от x, перепишем уравнение (9) в виде

$$\varphi(y(x))\, y'(x) = f(x).$$

Если равны функции, то неопределенные интегралы от них отличаются лишь на некоторую постоянную, т. е.

$$\int \varphi(y(x))\, y'(x)\, dx = \int f(x)\, dx + C, \tag{10}$$

где C — некоторая постоянная.

Применяя метод замены переменной (т. е. заменяя $y'(x)\, dx$ на dy), перепишем равенство (10) в виде

$$\int \varphi(y)\, dy = \int f(x)\, dx + C. \tag{11}$$

Если функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ — элементарные функции, непрерывные на всей оси, то и интегралы в обеих частях равенства (11) находятся в явном виде, т. е. равенство (11) перепишется в виде

$$\Phi(y) = F(x) + C, \tag{12}$$

где $\Phi(y)$ — первообразная для функции $\varphi(y)$, а $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. Теперь из равенства (12) выразим y через x. Полученная функция $y(x)$ и будет общим решением уравнения (9).

ПРИМЕР 2. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'y^2 = x(1 + x^2), \tag{13}$$

а затем частное решение дифференциального уравнения (13), удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

Применив формулу (11), получим:

$$\int y^2 dy = \int x(1+x^2)dx + C_1. \qquad (14)$$

Так как $\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_2$, а $\int x(1+x^2)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C_3$, то из равенства (14) следует равенство $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$, откуда находим общее решение уравнения (13):

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} + 3C}, \qquad (15)$$

где C — некоторая постоянная.

Для нахождения частного решения уравнения (13), удовлетворяющего условию $y(0) = 2$, подставим в равенство (15) $x = 0$, $y = 2$, получим $2 = \sqrt[3]{3C}$, откуда $C = \frac{8}{3}$. Следовательно, искомое частное решение есть $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} + 8}$.

Отметим, что выше рассмотрено лишь несколько простейших дифференциальных уравнений. Естественно, что, кроме них, существует много других дифференциальных уравнений.

Например, уравнение

$$y' = \alpha y, \qquad (16)$$

где α — данное число, имеет решение $y = Ce^{\alpha x}$, где C — некоторая постоянная.

В самом деле, $y' = \alpha Ce^{\alpha x} = \alpha y$, т. е. функция $y = Ce^{\alpha x}$ есть решение уравнения (16).

Рассмотрим еще одно дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad (17)$$

где $k > 0$ — данное число.

Уравнение (17) имеет решение $y = A\sin kt + B\cos kt$, где A и B — некоторые постоянные. Действительно,

$$y' = Ak\cos kt - Bk\sin kt,\ y'' = -Ak^2\sin kt - Bk^2\cos kt.$$

Подставляя выражения для y и y'' в уравнение (17), убеждаемся, что функция $y = A\sin kt + B\cos kt$ есть решение уравнения (17).

6.82 а) Какое уравнение называют дифференциальным уравнением?
б) Какое дифференциальное уравнение называют дифференциальным уравнением первого порядка; второго порядка?
в) Что называют решением дифференциального уравнения?
г) Что называют общим решением дифференциального уравнения; частным решением дифференциального уравнения?

Покажите, что функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения, если **(6.83—6.84)**:

6.83 а) $y' = x^3$, $y = \frac{1}{4}x^4 + 5$; б) $y' = \sin x$, $y = -\cos x - 1$;

в) $y' = \cos x - 7$, $y = \sin x - 7x + 2$;

г) $y' = 3\sin x + 4\cos x + 7$, $y = -3\cos x + 4\sin x + 7x - 3$.

Укажите общее решение дифференциального уравнения.

6.84 а) $y' = 5y$, $y = e^{5x}$; б) $y'' = 25y$, $y = e^{5x}$;

в) $y'' = 16y$, $y = e^{-4x}$; г) $y'' = -9y$, $y = \sin(3x + 5)$.

6.85 Покажите, что функция $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ является решением дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 y$.

6.86 Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию:

а) $y' = 4x^3$, $y(0) = 1$; б) $y' = 5\sin x$, $y(0) = 0$;

в) $y' = 6\cos x$, $y(\pi) = 5$; г) $y' = 7\sin x - 8\cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

д) $y'' = 66x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$; е) $y'' = -36x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

6.87 Для дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ найдите решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$; б) $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

в) $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

6.10*. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1. Нахождение закона движения тела по его скорости. Пусть точка движется по оси x. Ее скорость — заданная функция времени $v = f(t)$, и надо найти закон движения точки, т. е. зависимость ее координаты x от t $(t \geqslant 0)$, или, как говорят, зависимость пути от времени.

Пусть искомый закон движения определяется формулой $x = F(t)$. Производная от x по t равна $v = f(t)$, где $f(t)$ — непрерывная функция, т. е.

$$F'(t) = f(t). \qquad (1)$$

Мы получили дифференциальное уравнение относительно искомой функции $F(t)$. Решить уравнение (1) нетрудно: $F(t)$ есть первообразная от $f(t)$. Следовательно,

$$F(t) = \int f(t)\,dt + C,$$

где C — некоторая постоянная. Чтобы найти C для конкретного закона, надо знать дополнительно, где находилась точка в некоторый момент времени, например при $t = 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть точка движется по оси x. Ее скорость равна $v = 3t^2 - 2t$ (м/с). Найдем закон движения точки $x = x(t)$, если $x(0) = 2$.

Пусть искомый закон движения определяется формулой $x = F(t)$. Тогда $F'(t) = 3t^2 - 2t$ и

$$x = F(t) = \int (3t^2 - 2t)\,dt = t^3 - t^2 + C. \qquad (2)$$

Подставив $t = 0$, $x = 2$ в равенство (2), получим $0^3 - 0^2 + C = 2$, откуда $C = 2$.

Итак, $x = t^3 - t^2 + 2$ (м).

2. Нахождение закона движения тела по его ускорению. Пусть точка движется по оси x равноускоренно с ускорением, равным данному числу a, и надо найти закон ее движения.

Пусть искомый закон движения определяется функцией $x = F(t)$. По условию ее вторая производная равна a:

$$F''(t) = a.$$

Но первая производная есть первообразная для второй производной, поэтому

$$F'(t) = \int a\,dt = at + b,$$

где b — некоторая постоянная. Искомая же функция $F(t)$ есть первообразная для $F'(t)$, поэтому

$$F(t) = \int (at + b)\,dt = \frac{at^2}{2} + bt + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Итак, общий закон движения выражается формулой

$$x = F(t) = \frac{at^2}{2} + bt + C, \qquad (3)$$

где b и C — некоторые постоянные. Таким образом, имеется бесконечно много законов движения, служащих решениями поставленной задачи — каждой паре b и C соответствует свой конкретный закон. Чтобы его найти, надо, например, знать дополнительно, где находилась точка в некоторый момент времени t_0 и какова была ее скорость в этот момент.

ПРИМЕР 2. Из винтовки выстрелили вверх. Напишем закон движения пули, считая, что ускорение земного притяжения приближенно равно 10 м/с^2, а скорость вылета пули из винтовки 800 м/с (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Ось x направим вертикально вверх, пусть ее начальная точка совпадает с точкой вылета пули, за единицу длины примем метр.

Ускорение силы тяжести и сила тяжести направлены вниз, поэтому в наших расчетах ускорение силы тяжести считаем отрицательным и равным приближенно -10.

На основании формулы (3) закон движения выражается функцией $x = -5t^2 + at + C$. Так как пуля в момент $t = 0$ имела координату $x = 0$, то $0 = 0 + 0 + C$, откуда $C = 0$. Поэтому $x = -5t^2 + at$.

Чтобы определить a, возьмем производную от x по t:

$$\frac{dx}{dt} = -10t + a.$$

При $t = 0$ производная равна скорости вылета пули 800 м/с. Поэтому $a = 800$ и закон движения имеет вид

$$x = -5t^2 + 800t.$$

3. Охлаждение тела. Тело, имеющее температуру T_0, помещено в среду с температурой T_1 ($T_0 > T_1$). Найдем закон $T = T(t)$ зависимости его температуры от времени t.

Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела $\dfrac{dT}{dt}$ пропорциональна разности $T - T_1$ температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $T(t)$ убывающая, получим

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \tag{4}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Так как $dT = d(T - T_1)$, то, обозначив $\theta = T - T_1$, перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta. \tag{5}$$

Мы получили дифференциальное уравнение относительно функции $\theta = T - T_1$ от t.

Уравнению (5) удовлетворяет функция

$$\theta = Ae^{-kt}, \tag{6}$$

где A — некоторая постоянная.

Можно доказать, что формула (6) исчерпывает все решения уравнения (5).

Формула (6) дает бесконечно много решений поставленной задачи, соответствующих разным значениям постоянной A:

$$\theta = T - T_1 = Ae^{-kt},$$

откуда $T = T_1 + Ae^{-kt}$. Для нашей задачи $T = T_0$ при $t = 0$, поэтому $A = T_0 - T_1$ и решение данной задачи имеет вид

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Из полученной формулы видно, что $T = T_0$ при $t = 0$, затем с увеличением t температура T тела весьма быстро уменьшается. При $t \to +\infty$ она стремится к T_1 ($T \to T_1$ при $t \to +\infty$).

ПРИМЕР 3. Кипящий электрический самовар вынесли на воздух, и за 10 мин он остыл до 60°. Температура воздуха 20°. За сколько минут самовар остынет до 25°?

Здесь $T_0 = 100$, $T_1 = 20$, поэтому для функции $T = T(t)$ верно равенство $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$, или

$$\frac{d(T-20)}{dt} = -k(T-20). \qquad (7)$$

Уравнению (7) удовлетворяет функция $T = 20 + Ae^{-kt}$, где A — некоторая постоянная.

Из условия задачи следует, что

$$T(0) = 20 + Ae^{-0k} = 100 \text{ и } T(10) = 20 + Ae^{-10k} = 60.$$

Из первого условия имеем $A = 80$, тогда из второго условия $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1}$. Теперь для ответа на вопрос задачи надо решить уравнение $25 = 20 + Ae^{-kt}$ относительно t. Так как $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1}$, то получаем $5 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,1t}$, откуда находим $t = 40$.

Итак, самовар остынет до 25° через 40 мин.

4. Радиоактивный распад. Радиоактивное вещество в момент времени $t = 0$ имеет массу m_0. Требуется найти закон $m = m(t)$ изменения массы этого вещества от времени t.

Из курса физики известно, что скорость радиоактивного распада $\frac{dm}{dt}$ пропорциональна имеющейся в данный момент массе вещества. Учитывая, что функция $m(t)$ убывающая, получим равенство $\frac{dm}{dt} = -km$, где k — коэффициент, зависящий от свойств взятого радиоактивного вещества.

Дифференциальное уравнение такого вида мы уже рассматривали (см. уравнение (5)). Этому уравнению удовлетворяет функция $m = Ae^{-kt}$, где A — некоторая постоянная. Значения A и k находят из условия задачи.

5. Гармонические колебания. К висящей пружине снизу прикреплен груз массой m. Ось x направлена вниз (рис. 169). В неподвижном положении груз находится в начальной точке оси x. Выведем пружину из равновесия, сжав или растянув ее, и отпустим ее в момент времени $t = 0$. Груз будет колебаться в вертикальном направлении. Требуется найти закон $x = x(t)$ изменения координаты груза от времени t.

По закону Ньютона в любой момент произведение массы m на ускорение x'' равно силе, действующей на груз в этот момент. Это

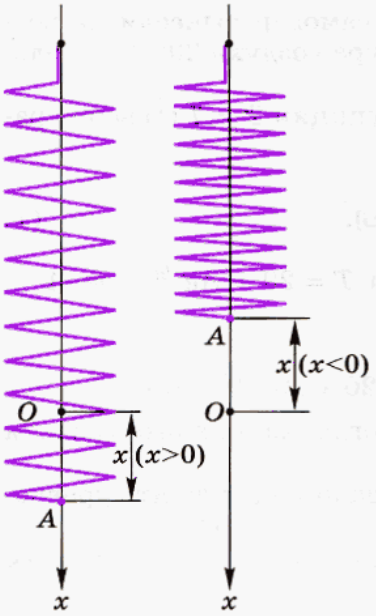


Рис. 169

сила упругости, равная по закону Гука произведению некоторого постоянного коэффициента a на величину отклонения груза от положения равновесия. Силы эти противоположно направлены, поэтому справедливо равенство $mx'' = -ax$. Обозначив $k^2 = \frac{a}{m}$, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + k^2x = 0. \qquad (8)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Функция

$$x(t) = A\sin kt + B\cos kt, \qquad (9)$$

где A и B — некоторые постоянные, является решением дифференциального уравнения (8).

Мы видим, что дифференциальное уравнение (8) имеет бесконечно много решений, соответствующих произвольным парам чисел A и B. Каждая конкретная функция $x(t)$ находится заданием двух условий. Обычно в качестве этих условий задают x_0 — отклонение груза в момент времени $t = 0$ и x_0' — скорость, сообщенную грузу в момент времени $t = 0$.

Например, пусть $x_0 \neq 0$ и $x_0' = 0$ при $t = 0$, тогда из формулы (9) следует, что $x_0 = B$ и $x'(t) = kA\cos kt - x_0k\sin kt$, $0 = kA$, $A = 0$. Поэтому груз колеблется по закону

$$x(t) = x_0\cos kt.$$

Формулу (9) (для $A^2 + B^2 > 0$) можно записать в виде

$$x(t) = C\cos(kt - \alpha) \quad (C > 0). \qquad (10)$$

Число $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ называют **амплитудой колебаний**. Отклонение груза $x(t)$ удовлетворяет неравенствам $-C \leqslant x(t) \leqslant C$, и при этом существуют значения t, для которых $x = C$ и $x = -C$. Число k называют **частотой колебаний**. Функция (10) имеет период, равный $\frac{2\pi}{k}$. За единицу времени происходит $1 : \frac{2\pi}{k} = \frac{k}{2\pi}$ колебаний. Наконец, число α называют **фазой колебаний**.

Замечание. Формула (10) моделирует процесс колебания пружины неточно. Она пригодна только для достаточно маленького промежутка времени $[0; t_0]$, при ее выводе не учтены силы трения, возникающие при колебании пружины, и сопротивление воздуха. Выше

установлено, что функция (9) является решением дифференциального уравнения (8), но не показано, как найти такое решение. Нахождение решения уравнения (8) требует знания комплексных чисел.

6.88 Точка движется по оси x со скоростью:
а) $v = 3$; б) $v = a$; в) $v = 2t$; г) $v = at$; д) $v = \cos t$; е) $v = e^t$.
Найдите возможные законы движения точки. Определите среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$, а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

6.89 Нарисуйте график функции $x = -5t^2 + 800t$, задающей закон движения пули, выпущенной вверх, и определите:
а) наибольшую высоту, на которую поднимется пуля;
б) момент времени, когда пуля достигнет наибольшей высоты;
в) момент падения пули на землю;
г) скорость пули в момент ее падения на землю.

6.90 Материальная точка падает с высоты 1000 м. Через сколько секунд она упадет на землю и с какой скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь и считать ускорение силы тяжести приближенно равным 10 м/с^2.

6.91 На высоте 2000 м от земли выстрелили из винтовки вверх. Скорость вылета пули 800 м/с.
а) Напишите закон движения пули, нарисуйте его график.
б) Какой наибольшей высоты достигнет пуля?
в) Через какое время пуля достигнет наибольшей высоты?
г) Через какое время пуля упадет на землю?
д) С какой скоростью пуля упадет на землю?
Сопротивлением воздуха пренебречь и считать ускорение силы тяжести приближенно равным 10 м/с^2.

6.92 В задаче **6.91** считать, что выстрел направлен вниз и ускорение земного притяжения равно 10 м/с^2, а скорость вылета пули из винтовки 800 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.
а) Через какое время пуля достигнет земли?
б) С какой скоростью пуля упадет на землю?

6.93 Кипящий электрический самовар отключили от сети и вынесли на воздух. За 12 мин он остыл до 52°. Температура воздуха 28°. Какой будет температура самовара через 24 мин?

6.94 Кипящий электрический самовар вынесли на воздух, и за 10 мин он остыл до 60°. Температура воздуха 20°. За сколько минут самовар остынет до 30°?

6.95* Первоначально в баке было 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно вливается 5 л чистой воды в минуту, и столько же раствора выливается из бака. Весь процесс происходит при тщательном перемешивании раствора. Сколько килограммов соли останется в баке через 1 ч?

Исторические сведения



Архимед

В своем сочинении «Квадратура параболы» Архимед пользовался методом исчерпывания для вычисления площади сектора параболы, этот же метод или его варианты он применял для определения площадей и объемов других фигур. Он вычислял площадь сегмента параболы, вписывая в нее подходящие многоугольники с неограниченным возрастанием числа их сторон. Вершины этих многоугольников он выбирал так, чтобы иметь возможность вычисления пределов.

Развивая идеи предшественников, Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. В работах «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах» он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса (значит, и объема цилиндра). Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление.

Фактически Архимед ввел понятие интегральных сумм (верхних и нижних) и объем полуэллипсоида как общий предел этих сумм при $n \to \infty$. Используя современный язык, Архимед определил следующие интегралы:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2 b}{2},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = 1, \quad \int_0^{\alpha} \sin\varphi\,d\varphi = -\cos\alpha + 1.$$

Конечно, у Архимеда не было еще общих понятий предела и интеграла, общего алгоритма интегрального исчисления. Его выкладки связаны только с решением конкретных геометрических задач без указания на то, что в основе их решения лежит общий прием арифметического суммирования сколь угодно малых частей фигур.

Символы $\int$, dx и название «интеграл» были введены Лейбницем. В то время знак суммирования Σ писали обычно в виде S, и символ $\int$ представляет собой просто стилизацию буквы S.

В XVII в. математики уже умели вычислять площади многих фигур с кривыми границами и объемы многих тел. Они умели также вычислять мгновенную скорость и наклон касательной к кривой в разных частных случаях. Эти работы составили основу для создания общего математического анализа, но сначала они представляли собой разрозненные результаты, не объединенные общей теорией.


И. Ньютон


Г. Лейбниц


О. Коши

А общая теория была создана во второй половине XVII в. в трудах английского математика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого математика Готфрида Лейбница (1646—1716). Ньютон и Лейбниц являются основателями дифференциального и интегрального исчислений.

Они открыли важную формулу (Ньютона — Лейбница):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[a; b]$, $F(x)$ — одна из ее первообразных (неопределенный интеграл).

Сделанное Ньютоном и Лейбницем открытие органической связи между понятиями интеграла и производной установило связь между дифференциальным и интегральным исчислениями, способствовало небывалому развитию математической науки.

В XVIII в. крупнейшим представителем математического анализа был Леонард Эйлер (1707—1783) — академик Российской академии наук.

Рассуждения, которые приводили Ньютон и Лейбниц, несовершенны с точки зрения современного математического анализа. Четкого определения понятия предела и понятия функции тогда еще не существовало. Эти понятия совершенствовались в XVIII в., в частности, в трудах Эйлера.

Только в начале XIX в. были окончательно созданы понятия предела последовательности чисел, предела функции, непрерывности функции, на которых основывается современный классический математический анализ. Обычно при этом отмечаются заслуги французского математика Огюстена Коши (1789—1857), которому принадлежат четкие формулировки указанных понятий.

Отметим, что наряду с производной и интегралом (определенным и неопределенным) очень важными понятиями в математическом анализе являются формула и ряд Тейлора, названные так в честь английского математика Брука Тейлора (1685—1731).

Например, значения элементарных функций e^x, $\ln x$, $\sin x$ и др. на практике вычисляют именно при помощи формулы Тейлора (см. п. 5.12).

Глава II

Уравнения. Неравенства. Системы

$$\sqrt{2x+5} = x+2$$

$$\begin{cases} 2x+5 = (x+2)^2 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ранее рассматривались рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, а также системы рациональных уравнений и неравенств.

В этой главе будут сформулированы утверждения, с помощью которых решают более сложные уравнения, неравенства и системы. Доказательства многих из этих утверждений аналогичны, поэтому далее приводятся доказательства лишь некоторых из них.

§ 7. Равносильность уравнений и неравенств

7.1. Равносильные преобразования уравнений

Пусть даны два уравнения $f(x) = g(x)$ и $\varphi(x) = \psi(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго, а любой корень второго уравнения является корнем первого, то такие два уравнения называют **равносильными**. Другими словами, два уравнения равносильны, если совпадают множества всех корней[1] этих уравнений. В частности, два уравнения равносильны, если каждое из них не имеет корней.

Например, уравнения $x^3 - 1 = 0$ и $x^5 - 1 = 0$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень 1. Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $x^4 + 1 = 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет корней. Уравнения $x^3 - 1 = 0$ и $x^2 - 1 = 0$ не равносильны, так как первое из них имеет единственный корень 1, а второе — два корня: 1 и -1, т. е. так как не совпадают множества корней этих двух уравнений.

Замену одного уравнения другим равносильным ему уравнением называют **равносильным преобразованием уравнения**.

---

[1] В дальнейшем слово «всех» во фразе «множество всех корней» для краткости опускаем, но подразумеваем его.

Если при решении уравнения совершено равносильное преобразование уравнения, то множество корней преобразованного уравнения совпадает с множеством корней исходного уравнения.

Перечислим основные равносильные преобразования уравнений. Начнем с преобразований, которые уже применялись ранее.

1. Перенос члена уравнения (с противоположным знаком) из одной части уравнения в другую.

2. Умножение (деление) обеих частей уравнения на отличное от нуля число.

3. Применение тождеств, т. е. равенств, справедливых для каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

Отметим, что при применении преобразований **1—3** часто даже не пишут, что получилось уравнение, равносильное исходному, а пишут: «перепишем исходное уравнение в виде...».

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$3\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x. \qquad (1)$$

Применив тождество $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, перепишем уравнение (1) в виде

$$3\cos 2x = -\cos 2x. \qquad (2)$$

Перенеся все члены уравнения (2) в левую часть, а затем разделив обе части полученного уравнения на 4, перепишем уравнение (2) в виде

$$\cos 2x = 0. \qquad (3)$$

Все корни уравнения (3), а значит, и равносильного ему уравнения (1) составляют серию решений $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Замену уравнения $f(x) = g(x)$ уравнением $f^n(x) = g^n(x)$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n \geqslant 2$, называют **возведением уравнения в степень n.**

Замену уравнения $f(x) = g(x)$ уравнением $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n \geqslant 2$, называют **извлечением корня степени n из обеих частей уравнения.**

Замену уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, уравнением $f(x) = g(x)$ называют **логарифмированием показательного уравнения.**

Перечислим еще несколько равносильных преобразований уравнений.

4. Возведение уравнения в нечетную степень.

5. Извлечение корня нечетной степени из обеих частей уравнения.

6. Логарифмирование показательного уравнения.

Равносильность преобразований **4—6** следует из утверждений:

1. Пусть $2m+1$ $(m \in N)$ — фиксированное нечетное число, тогда равносильны уравнения

$$f(x) = g(x) \qquad (4)$$

и

$$f^{2m+1}(x) = g^{2m+1}(x). \qquad (5)$$

2. Пусть $2m+1$ $(m \in N)$ — фиксированное нечетное число, тогда равносильны уравнения

$$f(x) = g(x) \text{ и } \sqrt[2m+1]{f(x)} = \sqrt[2m+1]{g(x)}.$$

3. Пусть фиксированное число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда равносильны уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \text{ и } f(x) = g(x).$$

Так как доказательства всех этих утверждений аналогичны, то приведем только доказательство утверждения 1.

Пусть число x_0 — любой корень уравнения (4), т. е. пусть существуют числа $f(x_0)$ и $g(x_0)$, для которых справедливо числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Но если равны числа, то равны и их любые нечетные натуральные степени, т. е. справедливо числовое равенство

$$f^{2m+1}(x_0) = g^{2m+1}(x_0).$$

Полученное равенство означает, что любой корень уравнения (4) является корнем уравнения (5).

Докажем обратное.

Пусть число x_1 — любой корень уравнения (5), т. е. пусть существуют числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$, для которых справедливо числовое равенство

$$f^{2m+1}(x_1) = g^{2m+1}(x_1).$$

Из равенства чисел следует равенство корней любой нечетной натуральной степени, т. е. справедливость числового равенства $f(x_1) = g(x_1)$. Полученное равенство означает, что любой корень уравнения (5) является корнем уравнения (4).

Из доказанного выше следует, что если хотя бы одно из уравнений (4) и (5) имеет корень, то эти уравнения равносильны.

Покажем, что если уравнение (4) не имеет корней, то и уравнение (5) не имеет корней.

Предположим противное, т. е. предположим, что уравнение (5) имеет хотя бы один корень x_2. Тогда по доказанному выше число x_2 является корнем уравнения (4), что противоречит условию: уравнение (4) не имеет корней. Следовательно, наше предположение неверно, т. е. уравнение (5) не имеет корней.

Аналогично показывается, что если уравнение (5) не имеет корней, то и уравнение (4) не имеет корней.

Следовательно, если хотя бы одно из уравнений (4) и (5) не имеет корней, то эти уравнения равносильны.

Итак, утверждение 1 полностью доказано. ●

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{12x^2 - 28x + 8} = 2 - x. \quad (6)$$

Возведя уравнение (6) в третью степень, получим уравнение

$$12x^2 - 28x + 8 = (2 - x)^3, \quad (7)$$

равносильное уравнению (6). Уравнение (7) имеет три корня: -8; 0; 2. Следовательно, равносильное ему уравнение (6) имеет те же корни.

Ответ. -8; 0; 2.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$(x - 5)^{11} = (2x + 4)^{11}. \quad (8)$$

Извлекая корень 11-й степени из обеих частей уравнения (8), получим уравнение

$$x - 5 = 2x + 4, \quad (9)$$

равносильное уравнению (8). Уравнение (9), а значит, и равносильное ему уравнение (8) имеют единственный корень -9.

Ответ. -9.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$5^{x^2 - 2x} = 5^{x - 2}. \quad (10)$$

Логарифмируя показательное уравнение (10), получим, что оно равносильно уравнению

$$x^2 - 2x = x - 2, \quad (11)$$

имеющему два корня: 1 и 2. Следовательно, и равносильное уравнению (11) уравнение (10) имеет те же корни.

Ответ. 1; 2.

При решении уравнений часто приходится применять несколько равносильных преобразований.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$(x^2 - 8^x + 2^x - 1)^7 = (x^2 - 2^x - 1)^7. \quad (12)$$

Извлекая корень 7-й степени из обеих частей уравнения (12), получим уравнение

$$x^2 - 8^x + 2^x - 1 = x^2 - 2^x - 1, \quad (13)$$

равносильное уравнению (12). Перенеся все члены уравнения в левую часть и приведя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (13) в виде

$$2 \cdot 2^x - 8^x = 0. \quad (14)$$

Так как справедливы тождества $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$ и $8^x = 2^{3x}$, то уравнение (14) можно переписать в виде

$$2^{x+1} = 2^{3x}. \qquad (15)$$

Логарифмируя показательное уравнение (15), получим равносильное ему уравнение

$$x + 1 = 3x, \qquad (16)$$

имеющее единственный корень $\frac{1}{2}$. Следовательно, и равносильное уравнению (16) уравнение (12) имеет тот же корень.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$5^{x+1} = 2^{x+2}. \qquad (17)$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$5^{x+1} = 5^{(x+2)\log_5 2}. \qquad (18)$$

Логарифмируя показательное уравнение (18), получим равносильное ему уравнение

$$x + 1 = (x + 2)\log_5 2. \qquad (19)$$

Уравнение (19), а следовательно, и равносильное ему уравнение (17) имеют единственный корень $\log_{2,5} 0{,}8$.

Ответ. $\log_{2,5} 0{,}8$. ●

7.1° а) Какие два уравнения называют равносильными?
б) Какие преобразования уравнения называют равносильными? Приведите примеры равносильных преобразований уравнения.

7.2* Докажите утверждения:
а) об извлечении корня нечетной степени из обеих частей уравнения;
б) о логарифмировании показательного уравнения.

7.3 Объясните, почему равносильны уравнения:
а) $x + 5 = 2x - 3$ и $x - 2x + 5 = -3$;
б) $\frac{1}{2}x^2 + 1 = x^3 - x$ и $x^2 + 2 = 2x^3 - 2x$;
в) $(x + 1)^2 = 2x^2$ и $x^2 + 2x + 1 = 2x^2$;
г) $x^2 + x + 2 - x^3 - x + 1 = 0$ и $x^2 - x^3 + 3 = 0$;
д) $x = 1$ и $x^3 = 1$; е) $x^5 = 2$ и $x = \sqrt[5]{2}$;
ж) $2^{x+2} = 2$ и $x + 2 = 1$; з) $\sin^3 x = \frac{1}{8}$ и $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решите уравнение (7.4—7.12):

7.4 а) $\cos 2x - \cos^2 x - \sin x = 0$; б) $\cos 2x - \cos^2 x + \sin x = 0$;
в) $\cos 2x + \cos^2 x - 0{,}5 = 0$; г) $\cos 2x - \sin^2 x + 0{,}5 = 0$.

7.5 а) $\sqrt[3]{x^3 + 3x - 15} = x$; б) $\sqrt[3]{x^3 - 3x - 4} = x$;
в) $\sqrt[3]{x^3 - 3x - 1} = x - 1$; г) $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 1} = x + 1$.

7.6 а) $\sqrt[3]{x} = x$; б) $3\sqrt[3]{x} = x - 2$;
в) $4\sqrt[3]{x + 2} = x + 2$; г) $3\sqrt[3]{x - 2} = x$.

7.7 а) $(2x - 3)^7 = (x + 1)^7$; б) $(3x + 1)^5 = (x + 9)^5$;
в) $(3x^2 - 4x)^9 = (x^2 - 8x)^9$; г) $(5x^2 + 4x)^3 = (x^2 + 2x)^3$.

7.8 а) $(5\sin^2 x - 4)^{11} = (\sin^2 x - 1)^{11}$; б) $(5\cos^2 x - 1)^7 = (\cos^2 x + 1)^7$;
в) $(4^x - 5)^{99} = (3 \cdot 2^x - 1)^{99}$; г) $(9^x - 1)^{95} = (3^x + 5)^{95}$.

7.9 а) $2^{2x} = 2^{x-9}$; б) $4^{2x-7} = 4^{x-1}$; в) $9^{3x-4} = 9^{x+2}$;
г) $3^{3x-1} = 3^{7x-2}$; д) $25^{x+1} = 5^{x^2+3x}$; е) $16^{x-1} = 4^{x^2-x}$.

7.10 а) $\dfrac{4^{1-2x}}{8} = 0{,}5 \cdot 2^{1,2+2x}$; б) $0{,}2 \cdot 5^{0,2x+3} = \dfrac{25^{0,2-x}}{125}$;

в) $\dfrac{3^{1+3x}}{9} = 27 \cdot 3^{1-2x}$; г) $\dfrac{2}{3} \cdot 4^{x-2} = \dfrac{8^{3-2x}}{12}$;

д) $(0{,}81)^{-2x} = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3}$; е) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{x^2-1} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^{1,5x}$.

7.11 а) $2^{x-1} = 3^x$; б) $2^x = 3^{x+1}$; в) $2^{x-2} = 3^{x-3}$; г) $2^{x-3} = 3^{x-2}$.

7.12 а) $5^{x+\sin x} = 5^{\sin x + 2}$; б) $6^{\sqrt[3]{x+1}} = 6^{\sqrt[3]{2x-1}}$;
в) $(x^2 - \sin x)^{101} = (x^2 + 1)^{101}$; г) $(x^7 + \cos x)^{103} = (x^7 - 1)^{103}$;
д) $\sqrt[7]{\sin^2 x + 4^x - 6} = \sqrt[7]{\sin^2 x - 2^x}$;
е) $\sqrt[5]{\sin^2 x + 9^x} = \sqrt[5]{-\cos^2 x + 3^x + 7}$.

7.13* При каком значении параметра a уравнение $3^{x^2-2x+a} = 9^x$ имеет единственный корень?

7.2. Равносильные преобразования неравенств

Пусть даны два неравенства $f(x) > g(x)$ и $\varphi(x) > \psi(x)$. Если любое решение первого неравенства является решением второго, а любое решение второго неравенства является решением первого, то такие два неравенства называют **равносильными**. Иными слова-

ми, два неравенства равносильны, если совпадают множества всех решений[1] этих неравенств. В частности, два неравенства равносильны, если каждое из них не имеет решений.

Например, неравенства $x > 1$ и $x^3 > 1$ равносильны, так как множество решений каждого из них одно и то же: $(1; +\infty)$, а неравенства $x^2 + 1 < 0$ и $x^4 + 1 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений.

Замену одного неравенства другим равносильным ему неравенством называют **равносильным преобразованием неравенства**.

Если при решении неравенства совершено равносильное его преобразование, то множество решений преобразованного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Перечислим основные равносильные преобразования неравенств. Начнем с преобразований, которые уже применялись ранее.

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую.

2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число.

3. Применение тождеств.

Отметим, что применение к неравенству преобразований **1—3** приводит к неравенству с тем же знаком. При этом часто даже не пишут, что получилось неравенство, равносильное исходному, а пишут: «перепишем исходное неравенство в виде...».

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$x^3 - 4 > 4x - x^2. \qquad (1)$$

Перенеся все члены неравенства в левую часть (1), перепишем его в виде

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0. \qquad (2)$$

Разложим на множители левую часть неравенства (2):

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Применяя это тождество, перепишем неравенство (2) в виде:

$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) > 0. \qquad (3)$$

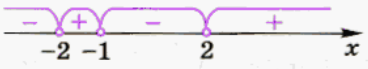


Рис. 170

Применяя метод интервалов (рис. 170), получим, что множество решений неравенства (3), а значит, и равносильного ему неравенства (1) есть объединение двух промежутков: $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ответ. $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$.

Замену неравенства $f(x) > g(x)$ неравенством $f^n(x) > g^n(x)$, где $n \in N$ и $n \geqslant 2$, называют **возведением неравенства в степень n.**

---

[1] В дальнейшем слово «всех» во фразе «множество всех решений» для краткости опускаем, но подразумеваем его.

Замену неравенства $f(x) > g(x)$ неравенством $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, где $n \in N$ и $n \geqslant 2$, называют **извлечением корня степени n из обеих частей неравенства.**

Замену неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ неравенством $f(x) > g(x)$ (при $a > 1$) или неравенством $f(x) < g(x)$ (при $0 < a < 1$) называют **логарифмированием показательного неравенства.**

Перечислим еще несколько равносильных преобразований неравенств.

4. Возведение неравенства в нечетную степень.

5. Извлечение корня нечетной степени из обеих частей неравенства.

6. Логарифмирование показательного неравенства.

Отметим, что применение к неравенству преобразований **4** и **5** приводит к неравенству с тем же знаком; применение преобразования **6** при $a > 1$ приводит к неравенству с тем же знаком, а при $0 < a < 1$ — к неравенству с противоположным знаком.

Равносильность преобразований **4—6** следует из утверждений:

1. Пусть $2m + 1$ $(m \in N)$ — фиксированное нечетное число, тогда равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $f^{2m+1}(x) > g^{2m+1}(x)$.

2. Пусть $2m + 1$ $(m \in N)$ — фиксированное нечетное число, тогда равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $\sqrt[2m+1]{f(x)} > \sqrt[2m+1]{g(x)}$.

3. Пусть a — фиксированное число. Тогда если $a > 1$, то равносильны неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$; если же $0 < a < 1$, то равносильны неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$x - 1 > \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 4x - 7}. \qquad (4)$$

Возведя неравенство (4) в третью степень, получим неравенство

$$(x - 1)^3 > x^3 - 2x^2 + 4x - 7, \qquad (5)$$

равносильное неравенству (4).

Применив формулу куба разности, перенеся все члены неравенства в правую часть и приведя подобные члены многочлена, получим неравенство

$$x^2 + x - 6 < 0, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5), а значит, и неравенству (4). Решив квадратное неравенство (6), найдем множество его решений — интервал $(-3; 2)$. Так как неравенство (6) равносильно неравенству (4), то множество решений неравенства (4) составляет тот же интервал.

Ответ. $(-3; 2)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$(2x^2 - 3x + 1)^7 < (x^2 + x + 1)^7. \qquad (7)$$

Извлекая корень 7-й степени из обеих частей неравенства (7), получим неравенство

$$2x^2 - 3x + 1 < x^2 + x + 1, \qquad (8)$$

равносильное неравенству (7). Неравенство (8), а значит, и равносильное ему неравенство (7) имеют одно и то же множество решений — интервал (0; 4).

Ответ. (0; 4).

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$3^{x^2 - x} < 9^{1 - x}. \qquad (9)$$

Неравенство (9) можно переписать в виде

$$3^{x^2 - x} < 3^{2(1 - x)}. \qquad (10)$$

Логарифмируя показательное неравенство (10), получим, что оно равносильно неравенству

$$x^2 - x < 2(1 - x),$$

множество решений которого есть интервал (–2; 1). Следовательно, этот интервал есть множество решений и неравенства (10), а также равносильного ему неравенства (9).

Ответ. (–2; 1).

При решении неравенств часто приходится применять несколько равносильных преобразований.

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$\sqrt[11]{9^x - 3^x + 5^{2x}} > \sqrt[11]{9^x - 3^x + 5^{3x}}. \qquad (11)$$

Возведя неравенство (11) в 11-ю степень, получим равносильное ему неравенство

$$9^x - 3^x + 5^{2x} > 9^x - 3^x + 5^{3x}. \qquad (12)$$

Перенеся члены 9^x и -3^x неравенства (12) в левую часть и пользуясь тождествами $9^x - 9^x = 0$ и $3^x - 3^x = 0$, получим равносильное ему неравенство

$$5^{2x} > 5^{3x}. \qquad (13)$$

Логарифмируя показательное неравенство (13), получим, что оно равносильно неравенству $2x > 3x$, множество решений которого, а значит, и равносильного ему неравенства (11) есть интервал $(-\infty; 0)$.

Ответ. $(-\infty; 0)$.

Наряду со строгими неравенствами часто встречаются нестрогие неравенства.

Для решения нестрогого неравенства

$$f(x) \geqslant g(x) \qquad (14)$$

надо: 1) решить уравнение

$$f(x) = g(x); \qquad (15)$$

2) решить неравенство

$$f(x) > g(x), \qquad (16)$$

и тогда множество решений неравенства (14) есть объединение всех решений уравнения (15) и всех решений неравенства (16).

ПРИМЕР 6. Решим неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x} \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+5}. \qquad (17)$$

Сначала решим уравнение

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+5}. \qquad (18)$$

Логарифмируя показательное уравнение (18), получим, что оно равносильно уравнению

$$1 - 2x = -x + 5,$$

имеющему единственное решение $x_0 = -4$.

Теперь решим неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-x+5}. \qquad (19)$$

Логарифмируя показательное неравенство (19), получим, что оно равносильно неравенству

$$1 - 2x < -x + 5,$$

множество решений которого составляют все $x > -4$.

Объединяя решения уравнения (18) и неравенства (19), находим все решения неравенства (17) — они образуют промежуток $[-4; +\infty)$.

Ответ. $[-4; +\infty)$.

7.14° а) Какие два неравенства называют равносильными?

б) Какие преобразования неравенства называют равносильными? Приведите примеры равносильных преобразований неравенств.

7.15* Докажите утверждения:
а) о возведении неравенства в нечетную степень;
б) об извлечении корня нечетной степени из обеих частей неравенства;
в) о логарифмировании показательного неравенства.

7.16* Докажите, что если число $a > 0$, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $af(x) > ag(x)$ равносильны.

7.17* Докажите, что если число $a < 0$, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $af(x) < ag(x)$ равносильны.

7.18° Объясните, почему равносильны неравенства:
а) $x^2 - 2x > -1$ и $x^2 - 2x + 1 > 0$; б) $3x > 6$ и $x > 2$;
в) $x^2 < 2x + 1$ и $-x^2 > -2x - 1$; г) $x^2 - 4x + 4 > 0$ и $(x-2)^2 > 0$;
д) $x^2 - 4x + 5 + 2x < 0$ и $x^2 - 2x + 5 < 0$; е) $\sqrt[3]{x} > 2$ и $x > 8$;
ж) $x^7 > 3$ и $x > \sqrt[7]{3}$; з) $0{,}1^{x^2 - 2x} > 0{,}1^x$ и $x^2 - 2x < x$;
и) $5^{\sin x} < 5^{\cos x}$ и $\sin x < \cos x$.

Решите неравенство **(7.19—7.32)**:

7.19 а) $x^3 - 5x^2 + 4x > (x-1)^3$;
б) $x^3 - 6x^2 + 9x > (x-3)^3$;
в) $x^3 + 5x^2 - 6x - 2 < 3x^2 - 3x + 4$;
г) $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 > x^3 - 2x$.

7.20* а) $\cos 2x + 3\sin^2 x + 2\sin x < 4$; б) $\cos 2x - \cos^2 x - 2\cos x < -2$.

7.21 а) $4^x + 2^x + x^2 < x^2 + 6$; б) $27^x + 9^x > 3^x + 6 + 27^x$.

7.22 а) $\sqrt[3]{3x^3 - 3x^2 - x + 5} > \sqrt[3]{2x^3 - 4x^2 + x + 5}$;
б) $\sqrt[3]{5x^3 - 6x^2 + 3x + 1} < \sqrt[3]{4x^3 - x^2 - 3x + 1}$.

7.23 а) $x + 1 > \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 3x - 4}$; б) $x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 7x + 2}$.

7.24 а) $(5x-2)^9 < (3x-14)^9$; б) $(3x-7)^7 > (5x-11)^7$;
в) $(x^2 - 5x)^{11} > (2x^2 - 7x)^{11}$; г) $(3x^2 + x)^{33} < (x^2 + 3x)^{33}$.

7.25 а) $(6\sin^2 x - 5)^{13} < (2\sin^2 x - 2)^{13}$;
б) $(6\cos^2 x - 3)^3 > (2\cos^2 x - 1)^3$;
в) $(2^x + 7)^9 > (3 \cdot 2^x + 1)^9$; г) $(2 \cdot 3^x - 1)^{51} < (3^x + 8)^{51}$.

7.26 а) $2^{x+1} > 2^{x^2 - 5}$; б) $(0{,}3)^{2x+5} > (0{,}3)^{x^2 + 2}$;
в) $5^{2x-9} < 5^{x^2 - 12}$; г) $(0{,}5)^{4x-7} < (0{,}5)^{x^2 - 4}$.

7.27 а) $4^{2x-7} > 2^{3x+1}$; б) $5^{3x-1} < 25^{x+1}$;
в) $7^{5x+1} < 49^{x-2}$; г) $8^{x+1} > 64^x$.

7.28 а) $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} < \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} < \left(\frac{7}{2}\right)^{3x-1}$;
в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{x+5}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} > \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1}$.

7.29 а) $5^{x-1} > 4^x$; б) $4^x < 5^{x+1}$; в) $15^{x-4} > 3^{x-3}$; г) $6^{x+5} < 3^{x+6}$.

7.30 а) $5^{x^2-2x} > 2^{x-2}$; б) $3^{x^2-x} < 2^{1-x}$;
в) $3^{x^2-x} > 5^{x-1}$; г) $7^{x^2-5x} < 6^{5-x}$.

7.31* а) $3^{4x+\sin x} > 3^{\sin x+2}$; б) $16^{\sqrt[3]{3x-50}} < 16^{\sqrt[3]{2x+20}}$;
в) $(x^2-\sin x)^{17} > (x^2+0{,}5)^{17}$; г) $(x^8+\cos x)^{13} < (x^8-0{,}5)^{13}$;
д) $\sqrt[3]{3\sin^2 x+4^x-3} > \sqrt[3]{-3\cos^2 x+2^x}$;
е) $\sqrt[5]{\sin^2 x+12\cdot 3^x-28} < \sqrt[5]{-\cos^2 x+9^x}$.

7.32 а) $\sqrt{27}\cdot 3^{-6x^2} \geqslant 9^{4x}$; б) $\sqrt{32}\cdot 2^{-4x^2} \geqslant 8^{3x}$;
в) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$; г) $125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$.

7.33* При каких значениях параметра a все решения неравенства $2^{x^2+2x-a^2} < 4^x$ содержатся в интервале $(-1; 1)$?

§ 8. Уравнения-следствия

8.1. Понятие уравнения-следствия

Пусть даны два уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = \varphi(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют **следствием** первого.

В частности, если первое уравнение не имеет корней, то любое второе уравнение является его следствием.

Например, рассмотрим уравнения $\sqrt{x} = 1$ и $x^2 = 1$. Первое уравнение имеет только один корень — число 1, которое является корнем второго уравнения, поэтому уравнение $x^2 = 1$ есть следствие уравнения $\sqrt{x} = 1$. Но уравнение $x^2 = 1$ имеет еще один корень — число -1, которое не является корнем уравнения $\sqrt{x} = 1$. Поэтому уравнения $\sqrt{x} = 1$ и $x^2 = 1$ не являются равносильными.

Замену уравнения другим уравнением, которое является его следствием, называют **переходом к уравнению-следствию**. При переходе к уравнению-следствию возможно появление корней, не являющихся корнями исходного уравнения, т. е. возможно появление **корней, посторонних для данного уравнения**.

В то же время при переходе к уравнению-следствию невозможно потерять корни исходного уравнения (это следует из определения уравнения-следствия).

Таким образом, если при решении данного уравнения совершен переход к уравнению-следствию, то необходимо проверить, все ли корни уравнения-следствия являются корнями исходного уравнения. Иными словами, при таком способе решения уравнения **проверка полученных корней является обязательной частью решения уравнения.**

Замену уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a \neq 1$ — фиксированное положительное число) уравнением $f(x) = g(x)$ называют **потенцированием логарифмического уравнения.**

Замену уравнения $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ уравнением $f(x) = 0$ называют **освобождением уравнения от знаменателя.**

Замену разности $f(x) - f(x)$ нулем называют **приведением подобных членов.**

Перечислим некоторые преобразования, которые приводят к уравнению-следствию, а значит, могут привести к появлению посторонних корней.

1. Возведение уравнения в четную степень.

Например, при возведении уравнения $\sqrt{x} = 1$ в четвертую степень получается уравнение-следствие $x^2 = 1$, имеющее корень -1, посторонний для исходного уравнения.

2. Потенцирование логарифмического уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Например, потенцирование логарифмического уравнения

$$\lg(x^2 - 4) = \lg(4x - 7)$$

приводит к уравнению-следствию

$$x^2 - 4 = 4x - 7,$$

имеющему корень 1, посторонний для исходного уравнения.

3. Освобождение уравнения от знаменателя.

Например, освобождение уравнения

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} = 0$$

от знаменателя приводит к уравнению-следствию

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

имеющему корень 1, посторонний для исходного уравнения.

4. Приведение подобных членов.

Например, после приведения подобных членов уравнения

$$\sqrt{x} + x + (1 - \sqrt{x}) = 0$$

получается уравнение $x + 1 = 0$, имеющее корень -1, посторонний для исходного уравнения.

Замечание. Отметим, что применение формул (логарифмических, тригонометрических и др.) также может привести к уравнению-следствию.

Например, если к уравнению

$$\sqrt{x}\sqrt{x+3} = 2 \qquad (1)$$

применить формулу $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, то получим уравнение

$$\sqrt{x(x+3)} = 2, \qquad (2)$$

которое является следствием уравнения (1). Оно имеет корень -4, посторонний для уравнения (1).

Если к уравнению

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \qquad (3)$$

применить формулу $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$, то получим уравнение

$$\log_2((x-1)(x+1)) = 3, \qquad (4)$$

которое является следствием уравнения (3). Оно имеет корень -3, посторонний для уравнения (3).

Отметим, что если применить те же формулы, но в обратном порядке, к уравнениям (2) и (4), то при таких преобразованиях получаются уравнения, не являющиеся следствиями уравнений (2) и (4), и при этом даже произойдет потеря корней. Так при переходе от уравнения (2) к уравнению (1) происходит потеря корня -4, а при переходе от уравнения (4) к уравнению (3) происходит потеря корня -3.

Существуют и другие преобразования уравнений, которые могут привести к потере корней исходного уравнения (см. упражнение 8.5). Ясно, что при решении уравнений **нельзя применять преобразования, приводящие к потере корней исходного уравнения.**

8.1° а) Какое уравнение называют уравнением-следствием исходного уравнения?

б) Являются ли все корни исходного уравнения корнями его уравнения-следствия?

в) Может ли уравнение-следствие иметь корень, не являющийся корнем исходного уравнения?

г) Какие преобразования приводят к уравнениям-следствиям?

д) Является ли проверка полученных корней обязательной частью решения уравнения, если в процессе решения был совершен переход от уравнения к уравнению-следствию?

Объясните, в результате какого преобразования переход от первого уравнения ко второму приводит к появлению посторонних корней. Подберите корень второго уравнения, посторонний для первого уравнения **(8.2—8.4)**:

8.2 а) $x = 2,\ x^2 = 4;$

б) $\log_3 x^2 = \log_3 x,\ x^2 = x;$

в) $\dfrac{(x-4)-(2x-3)}{x^2-1} = 0,\ (x-4)-(2x-3) = 0;$

г) $x^2 + 3x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 4,\ x^2 + 3x - 4 = 0.$

8.3* а) $\sqrt{x-2}\sqrt{x-3} = 0,\quad \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0;$

б) $\dfrac{\sqrt{2x^2-9x+3}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x+3},\quad \sqrt{\dfrac{2x^2-9x+3}{x-2}} = \sqrt{x+3};$

в) $2\log_4 x = 1,\ \log_4 x^2 = 1;$

г) $3^{\log_3 x} = x^2,\ x = x^2;$

д) $\log_2 x + \log_2 (x+2) = 3,\quad \log_2 (x(x+2)) = 3;$

е) $\log_2 x - \log_2 (x+2) = \log_2 (2x+10),\ \log_2 \dfrac{x}{x+2} = \log_2 (2x+10).$

8.4* а) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0,\ \sin 2x = 0;$ б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = -1,\ \cos 2x = -1.$

8.5* Объясните, почему преобразование уравнения с применением данной формулы слева направо может привести к появлению посторонних корней ($a > 0,\ a \neq 0$):

а) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)\,g(x)};$ б) $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}};$

в) $a^{\log_a f(x)} = f(x);$ г) $2\log_a f(x) = \log_a f^2(x);$

д) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)\,g(x));$

е) $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)};$

ж) $\dfrac{1}{\log_{f(x)} a} = \log_a f(x);$ з) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x;$

и) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x;$ к) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x;$

л) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x;$ м) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 2x.$

Может ли применение той же формулы справа налево привести к потере корней?

8.2. Возведение уравнения в четную степень

Пусть $2m$ ($m \in N$) — фиксированное четное натуральное число. Тогда следствием уравнения

$$f(x) = g(x)$$

является уравнение

$$(f(x))^{2m} = (g(x))^{2m}.$$

Очень часто это утверждение применяется при решении **иррациональных уравнений**, т. е. уравнений, содержащих неизвестное x под знаком корня.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$x + 1 = \sqrt{3x + 7}. \quad (1)$$

Возведя уравнение (1) в квадрат, получим уравнение

$$(x + 1)^2 = 3x + 7, \quad (2)$$

являющееся следствием уравнения (1). Уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (1), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 3.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sqrt{1 - \sin x} = \cos x. \quad (3)$$

Возведя уравнение (3) в квадрат, получим уравнение

$$1 - \sin x = \cos^2 x, \quad (4)$$

являющееся следствием уравнения (3). Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение (4) можно переписать в виде

$$\sin x(\sin x - 1) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет две серии решений:

$$x_k = \pi k,\ k \in Z;\ x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Так как $\sqrt{1 - \sin x_k} = 1$, $\cos x_k = (-1)^k$; $\sqrt{1 - \sin x_n} = 0$, $\cos x_n = 0$, то все числа x_n являются решениями уравнения (3), а из чисел x_k решениями уравнения (3) являются только те, для которых $k = 2m$, $m \in Z$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ 2\pi m,\ m \in Z.$

Возведение в четную степень можно применять и при решении уравнений, содержащих модуль.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$|x^2 - 3x - 1| = x^2 - 2x - 2. \qquad (6)$$

Возведя уравнение (6) в квадрат, получаем уравнение

$$(x^2 - 3x - 1)^2 = (x^2 - 2x - 2)^2, \qquad (7)$$

являющееся следствием уравнения (6). Перепишем уравнение (7) в виде

$$(x^2 - 3x - 1)^2 - (x^2 - 2x - 2)^2 = 0$$

или в виде

$$(x^2 - 3x - 1 - x^2 + 2x + 2)(x^2 - 3x - 1 + x^2 - 2x - 2) = 0$$

и найдем его корни $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -0{,}5$.

Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (6), а числа x_2 и x_3 — нет.

Ответ. 3. ●

8.6° а) Объясните, почему возведение уравнения в четную степень может привести к появлению корней, посторонних для исходного уравнения.

б)* Докажите утверждение о возведении уравнения в четную степень.

в) Какое уравнение называют иррациональным? Как можно решать иррациональное уравнение?

8.7 Возведите уравнение во вторую степень, решите полученное уравнение, проверьте, являются ли корни уравнения-следствия корнями исходного уравнения:

а) $\sqrt{x} = x - 2$; б) $\sqrt{3x} = 2x - 3$; в) $\sqrt{2x - 1} = x$; г) $\sqrt{3x - 2} = x$.

Решите уравнение (**8.8—8.11**):

8.8 а) $\sqrt{x^2 - 4x + 1} = \sqrt{3x + 1}$;

б) $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = \sqrt{3x^2 - x + 1}$;

в) $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{4x - 10}$;

г) $\sqrt{x^2 - 3x - 3} = \sqrt{2x^2 - 2x - 9}$.

8.9 а) $\sqrt{5x + 2} = x\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3x + 2} = x\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2x + 5} = x + 1$;

г) $\sqrt{3x + 7} = 2x + 3$;

д) $\sqrt{2x^2 - 4x + 1} = x + 1$;

е) $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = x - 1$.

8.10* а) $\sqrt{\log_2^2 x + 3} = \log_2 x - 1$; б) $\sqrt{\log_3^2 x + 5} = 1 - \log_3 x$;
в) $\sqrt{4^{x+1} - 2^{x+1} - 3} = 2^x + 1$; г) $\sqrt{3 \cdot 4^x - 2^x + 2} = 2^x + 1$;
д) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$; е) $\sqrt{1 + \sin x} = \cos x$.

8.11* а) $|x^2 - 4x + 2| = x^2 - 6x + 10$; б) $|x^2 - 2x - 2| = x^2 - 4x + 6$;
в) $|2 \lg x - 3| = 3 \lg x - 2$; г) $|3 \lg x - 4| = 2 \lg x - 1$;
д) $|2^{x+1} - 7| = 5 - 2^x$; е) $|2^{x+1} - 7| = 2^x + 1$.

8.12* При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 + 6x - 2a} = x + 2$ имеет единственный корень?

8.3. Потенцирование логарифмических уравнений

Пусть a — данное число ($a > 0$, $a \neq 1$). Тогда следствием уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \qquad (1)$$

является уравнение

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть число x_0 — некоторый корень уравнения (1), т. е. пусть существуют числа $\log_a f(x_0)$ и $\log_a g(x_0)$, для которых справедливо числовое равенство $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. Но если логарифмы двух чисел по одному основанию равны, то равны и сами числа, т. е. справедливо числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Следовательно, число x_0 является корнем уравнения (2). Такое рассуждение можно провести для любого корня уравнения (1), следовательно, любой корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), т. е. уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Если же уравнение (1) не имеет корней, то тогда, как отмечено в п. 8.1, уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Утверждение доказано полностью.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\log_2(x^5 + x^2 - 4) = \log_2(x^5 + 4x - 7). \qquad (3)$$

Потенцируя логарифмическое уравнение (3), получаем уравнение

$$x^5 + x^2 - 4 = x^5 + 4x - 7, \qquad (4)$$

являющееся следствием уравнения (3). Перенося все члены уравнения (4) в левую часть и приводя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (4) в виде

$$x^2 - 4x + 3 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5), а следовательно, и уравнение (4) имеют по два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Проверка показывает, что число x_2 является корнем уравнения (3), а число x_1 — нет.

Ответ. 3.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\log_3 \cos 2x = \log_3 \sin x. \qquad (6)$$

После потенцирования логарифмического уравнения (6) и применения формулы косинуса двойного угла получаем уравнение

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x, \qquad (7)$$

являющееся следствием уравнения (6).

Только корни двух уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -1$ являются корнями уравнения (7). Все решения этих простейших тригонометрических уравнений задаются тремя сериями решений:

$$x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\ x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Проверка показывает, что все числа серий x_m и x_n являются решениями уравнения (6), а числа серии x_k — нет. Следовательно, все решения уравнения (6) задаются сериями x_m и x_n.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ●

8.13° Объясните, почему переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению корней, посторонних для первого уравнения.

Решите уравнение **(8.14—8.19)**:

8.14 а) $\log_2(x^2 - 3x) = \log_2(x - 3)$; б) $\log_4(x^2 - 5x) = \log_4(x - 9)$;
в) $\log_5(x^2 + 13x) = \log_5(9x + 5)$; г) $\log_6(x^2 - x) = \log_6(6x - 10)$.

8.15 а) $\log_3(x^2 - 2x) = 1$; б) $\log_2(x^2 + 2x) = 3$;
в) $\log_7(x^2 + 1{,}5x) = 0$; г) $\log_5\left(x^2 + 2\frac{2}{3}x\right) = 0$.

8.16* а) $\log_{11}\left(\frac{x+20}{x}\right) = \frac{\log_2 41}{\log_2 11}$; б) $\log_{13}\left(\frac{x+11}{x}\right) = \frac{\log_3 23}{\log_3 13}$;
в) $\log_5\left(\frac{x+10}{x}\right) = \frac{\log_{11} 21}{\log_{11} 5}$; г) $\log_7\left(\frac{x+15}{x}\right) = \frac{\log_{13} 31}{\log_{13} 7}$.

8.17* а) $\log_3(2 \cdot 3^x - 5) = \log_3(3^x + 4)$;
б) $\log_7(2 \cdot 4^x - 3) = \log_7(4^x + 1)$;
в) $\log_5(4^x - 3 \cdot 2^x) = \log_5(3 \cdot 2^x - 8)$;
г) $\log_4(9^x - 5 \cdot 3^x) = \log_4(7 \cdot 3^x - 27)$.

8.18* а) $\log_2(4^x - 2^{x+1} + 2) = x$;
б) $\log_3(9^x - 3^{x+1} + 3) = x$;
в) $\log_2(4^x + 2^{x+1} - 8) = x + 2$;
г) $\log_5(25^x + 5^x - 5) = x + 1$.

8.19* а) $\log_2 \cos 2x = \log_2 \cos x$;
б) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x = \log_{\frac{1}{2}}(\cos x + \sin x)$;
в) $\log_{\frac{1}{3}} \cos 2x = \log_{\frac{1}{3}}(\cos x - \sin x)$;
г) $\log_{0,2} \cos 2x = \log_{0,2}(\sin x - \cos x)$.

8.20* При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 + 3x + a) = \lg(x + 1)^2$ не имеет корней?

8.4. Другие преобразования, приводящие к уравнению-следствию

1. Приведение подобных членов уравнения.

Следствием уравнения $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ является уравнение $f(x) = 0$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$x^2 + \log_2(x^3 + x - 1) = x + 6 + \log_2(x^3 + x - 1). \qquad (1)$$

Перенося все члены уравнения (1) в левую часть и приводя подобные члены, получим уравнение

$$x^2 - x - 6 = 0, \qquad (2)$$

являющееся следствием уравнения (1). Уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (1), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень 3.

Ответ. 3.

2. Освобождение уравнения от знаменателя.

Следствием уравнения $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ является уравнение $f(x) = 0$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\frac{x^2+2x}{\cos \pi x - 1} = \frac{6+x}{\cos \pi x - 1}. \qquad (3)$$

Перенеся все члены уравнения в одну часть, перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{x^2+x-6}{\cos \pi x - 1} = 0. \qquad (4)$$

Освобождаясь от знаменателя в уравнении (4), получаем уравнение

$$x^2+x-6=0, \qquad (5)$$

являющееся следствием уравнения (3). Уравнение (5) имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=2$. Так как $\cos \pi x_1 = \cos(-3\pi) = -1$, а $\cos \pi x_2 = \cos 2\pi = 0$, то число x_1 является корнем уравнения (3), а число x_2 — нет, так как делить на нуль нельзя.

Ответ. -3.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\sin 4x}{\cos 4x}. \qquad (6)$$

Перенося все члены уравнения в левую часть, приводя дроби к общему знаменателю и освобождаясь от знаменателя, получаем уравнение

$$\sin 6x = 0, \qquad (7)$$

являющееся следствием уравнения (6). Уравнение (7) имеет только одну серию решений $x_k = \frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Проверка показывает, что все числа x_k являются решениями уравнения (6).

Ответ. $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подчеркнем, что хотя проверка и не обнаружила посторонних корней, но она является обязательной частью решения уравнения (6).

3. Применение формул.

Пусть дана некоторая формула (логарифмическая, тригонометрическая и т. п.), у которой левая часть определена в каждой точке множества M_1, а правая часть — в каждой точке множества M_2, причем $M_1 \subset M_2$. Тогда если при решении уравнения применить эту формулу так, что ее левую часть заменить правой, то получится уравнение-следствие исходного.

Запись $M_1 \subset M_2$ (множество M_1 является подмножеством множества M_2) означает, что каждый элемент множества M_1 является элементом множества M_2.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$3^{\log_3(x^2-4x+3)} = 2x - 5. \qquad (8)$$

Применив формулу $3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x^2 - 4x + 3$, правая часть которой определена для каждого $x \in \boldsymbol{R}$, а левая часть — не для каждого $x \in \boldsymbol{R}$, получим уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 5, \qquad (9)$$

являющееся следствием уравнения (8). Уравнение (9) имеет два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (8), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (8) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 4.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\frac{1}{(\log_x 2)^2} - 2\log_2 x = 0. \qquad (10)$$

Применяя формулу $\frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$, правая часть которой определена для всех $x > 0$, а левая часть — не для всех $x > 0$, получаем уравнение

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x = 0, \qquad (11)$$

являющееся следствием уравнения (10). Уравнение (11) имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Проверка показывает, что число x_1 не является корнем уравнения (10), а число x_2 является корнем уравнения (10). Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень x_2.

Ответ. 4.

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 2x. \qquad (12)$$

Применив формулу $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$, правая часть которой определена для каждого $x \in \boldsymbol{R}$, а левая часть — не для каждого $x \in \boldsymbol{R}$, получим уравнение

$$\sin 2x = \sin^2 2x, \qquad (13)$$

являющееся следствием уравнения (12). Уравнение (13) имеет две серии решений: $x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x_m = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Проверка показывает, что все числа x_n являются решениями уравнения (12), а числа x_m лишь для $m = 2k$ будут являться решениями уравнения (12). Следовательно, уравнение (12) имеет две серии решений: x_n и $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; πk, $k \in \boldsymbol{Z}$. ●

8.21° а) Объясните, почему могут привести к появлению корней, посторонних для исходного уравнения, преобразования: 1) приведение подобных членов; 2) освобождение от знаменателя; 3)* применение формул.

б)* Докажите утверждения: 1) о приведении подобных членов; 2) об освобождении от знаменателя; 3) о применении формул.

Решите уравнение **(8.22—8.30)**:

8.22 а) $5(7-3\sqrt{x})-3(2x-5\sqrt{x})=41$;

б) $2(3-5\sqrt{x})-5(x-2\sqrt{x})=x$.

8.23 а) $(x+2\sqrt{x})^2-4x\sqrt{x}=-3$; б) $(x+\sqrt{x})^2-2x\sqrt{x}=6$;

в) $(x-2\sqrt{x})^2+4x\sqrt{x}=5$; г) $(x-\sqrt{x})^2+2x\sqrt{x}=30$.

8.24 а) $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+x^2-7x=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}-6$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}+x^2-2x=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}+24$;

в) $x^2+13+\log_2(x^3-9)=8x+\log_2(2x^3-18)$;

г) $x^2+2x+\log_3(x^3+4)=23+\log_3(3x^3+12)$.

8.25 а) $\frac{x-1}{x^2+x-2}=-3$; б) $\frac{3x+21}{x^2+5x-14}=1$;

в) $\frac{4x-8}{x^2-x-2}=3$; г) $\frac{5x+15}{x^2-9}=-1$.

8.26 а) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\sin x}{\cos x}$; б) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-\frac{\sin x}{\cos x}$;

в) $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}$; г) $\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\sin 4x}{\cos 4x}$.

8.27 а) $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x$; б) $\operatorname{ctg}3x=\operatorname{ctg}5x$;

в) $\sin x=\frac{\cos x}{\sin x}$; г) $\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

8.28* а) $10^{\lg(x^2+5x-1)}=3x+2$; б) $10^{\lg(x^2-3x+1)}=x-2$;

в) $2^{\log_2(2x^2+5x-1)}=x^2-7$; г) $5^{\log_5(3x^2+4x-1)}=2x^2-4$.

8.29* а) $\frac{2}{(\log_x 5)^2}-\log_5 x=0$; б) $\frac{1}{(\log_x 3)^2}+\log_3 x=0$;

в) $\frac{2}{(\log_x 4)^2}+\log_4 x=0$; г) $\frac{1}{(2\log_x 6)^2}-\log_6 x=0$.

8.30* а) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos x-\sin^2 x$; б) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x+\sin x$;

в) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=2\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x$; г) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sqrt{2}\cos x-2\cos^2 x$.

8.31* При каких значениях параметра a уравнение:

а) $x-a+\sqrt{x-a}=2x+1+\sqrt{x-a}$;

б) $\frac{a-2}{ax-3}=1$; в) $\frac{1}{(\log_x 5)^2}-2a\cdot\log_5 x+1=0$

имеет единственный корень?

8.5. Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению-следствию

При решении уравнений часто приходится применять несколько преобразований, приводящих к уравнению-следствию.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1}. \qquad (1)$$

Возводя уравнение (1) в квадрат, получим уравнение

$$x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}+x-4=3x+1, \qquad (2)$$

являющееся следствием уравнения (1). Перенося в правую часть уравнения все слагаемые, кроме корней, и приводя подобные члены многочлена, перепишем уравнение (2) в виде

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}=x+4. \qquad (3)$$

Возводя уравнение (3) в квадрат, получим уравнение

$$4(x+1)(x-4)=x^2+8x+16, \qquad (4)$$

являющееся следствием уравнения (3), а значит, и уравнения (1). Уравнение (4) имеет два корня: $x_1=-\frac{4}{3}$ и $x_2=8$. Проверка показывает, что число x_2 является корнем уравнения (1), а число x_1 — нет. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_2.

Ответ. 8.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sqrt{\frac{2x-2}{x+4}+\operatorname{ctg} x}=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}+\operatorname{ctg} x}. \qquad (5)$$

Возводя уравнение (5) в квадрат, получим уравнение

$$\frac{2x-2}{x+4}+\operatorname{ctg}x=\frac{x-1}{x+2}+\operatorname{ctg}x, \qquad (6)$$

являющееся следствием уравнения (5). Перенося все члены уравнения в его левую часть и приводя подобные члены, получим уравнение

$$\frac{2x-2}{x+4}-\frac{x-1}{x+2}=0, \qquad (7)$$

являющееся следствием уравнения (6), а значит, и уравнения (5).

Приводя дроби к общему знаменателю и освобождаясь от знаменателя в уравнении (7), получим уравнение

$$(2x-2)(x+2)-(x-1)(x+4)=0, \qquad (8)$$

являющееся следствием уравнения (7), а значит, и уравнения (5). Уравнение (8) имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=0$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (5), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 1.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\log_2(3x+1)+\log_2(x-1)=2\log_2(x+3). \qquad (9)$$

Применяя формулы $\log_2(3x+1)+\log_2(x-1)=\log_2(3x+1)(x-1)$ и $2\log_2(x+3)=\log_2(x+3)^2$, получим уравнение

$$\log_2(3x+1)(x-1)=\log_2(x+3)^2, \qquad (10)$$

являющееся следствием уравнения (9). Потенцируя уравнение (10), получим уравнение

$$(3x+1)(x-1)=(x+3)^2, \qquad (11)$$

являющееся следствием уравнения (10), а значит, и уравнения (9).

Уравнение (11) имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=-1$. Проверка показывает, что число x_1 является корнем уравнения (9), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (9) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 5. ●

Решите уравнение (8.32—8.41):

8.32 а) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$; б) $\sqrt{2x+6}=2+\sqrt{x+1}$;

в) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$; г) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+5}=5$.

8.33 а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x+3}$; б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+19}$;

в) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$; г) $\sqrt{9-5x}-\sqrt{x-1}=2\sqrt{2-x}$.

8.34 а) $\sqrt{x^2+3}+\log_2 x = 2+\log_2 x$;

б) $\log_2 \frac{12}{-3-x} = \log_2 (1-x)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x^4-17x^2+\log_2 x) = \log_{\frac{1}{3}}(19x^2+\log_2 x)$;

г) $\log_3 (x^2-\sqrt{x^2-4}+1) = \log_3 (x^3-\sqrt{x^2-4}-6x+1)$.

8.35 а) $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2x-2}{x-6}+\sqrt{x}}$; б) $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}+\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2x-6}{x-4}+\sqrt{x}}$;

в) $\sqrt{\frac{x+1}{x-3}+3\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}} = \sqrt{\frac{x+4}{3x-8}+3\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$;

г) $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}} = \sqrt{\frac{x-3}{2x+3}-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$.

8.36* а) $2\log_4 (x+1) = \log_4 (4x+9)$;

б) $2\log_5 (x-1) = \log_5 (7-x)$;

в) $\log_7 (x-2)+\log_7 (x+3) = \log_7 (2x^2-4x)$;

г) $\log_6 (x+2)+\log_6 (x-3) = \log_6 (2x^2-5x-6)$;

д) $\lg (x-2)-\lg (x+3) = \lg \frac{x}{5x+3}$;

е) $\lg (x+2)-\lg (x-3) = \lg \frac{5x+4}{x}$.

8.37 а) $\sqrt{x-5}\sqrt{x-6} = \sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x-3}\sqrt{x-7} = \sqrt{x+3}$;

в) $\frac{\sqrt{7x-21}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{5x-17}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3x-7}}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{3-4x}$.

8.38* а) $\lg 2x-\lg (x+4) = \lg 0{,}4$;

б) $\lg (x-4)+\lg (x-6) = \lg 8$;

в) $\lg (x+5)+\lg (x-4) = \lg (x+16)$;

г) $\lg (x-3)+\lg (x+4) = \lg (7x-20)$.

8.39* а) $\log_3 \sqrt{x}+\log_3 \sqrt{x+8} = 1$; б) $\log_2 \sqrt{x+3}+\log_2 \sqrt{x+6} = 1$;

в) $\log_3 \sqrt{x+4}+\log_3 \sqrt{x-4} = 1$; г) $\log_4 \sqrt{x+3}+\log_4 \sqrt{x-3} = 1$.

8.40* а) $\log_2 (x+1) = \log_4 (5x+1)$; б) $\log_3 (x-2) = \log_9 (3x-6)$.

8.41* а) $\sqrt{\log_2 (x+2)+\log_2 (x+1)} = \sqrt{\log_2 (x-2)+\log_2 (2x-1)}$;

б) $\sqrt{\log_3 (2x-1)+\log_3 (x-4)} = \sqrt{2\log_3 (x-2)}$;

в) $\sqrt{\log_2 \sin x+2} = \sqrt{1-\log_2 \cos x}$;

г) $\sqrt{\log_2 (-\cos x)+3} = \sqrt{2-\log_2 (-\sin x)}$.

8.42* Докажите, что при любом значении параметра a уравнение

$$\lg x + \lg(x - 2a) = \lg 4$$

имеет единственный корень.

§ 9. Равносильность уравнений и неравенств системам

9.1. Основные понятия

Пусть дано несколько уравнений и несколько неравенств с неизвестным x и пусть требуется найти все числа x, каждое из которых удовлетворяет каждому их этих уравнений и неравенств. Тогда говорят, что дана система уравнений и неравенств, или, коротко, дана **система**. Чтобы записать систему, обычно записывают друг под другом все входящие в нее уравнения и неравенства и объединяют их слева фигурной скобкой.

Ниже записаны примеры систем:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \dfrac{x+2}{x-3} > \dfrac{x+4}{x-5} \\ \log_{\frac{1}{3}}(2x-3) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} = 2 \\ \cos x > 0 \\ \log_5(x^2-1) \geqslant 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |x-5| = \lg(\sin x) \\ \sqrt{x-3} < 1 \\ 1 \leqslant 2^x \leqslant 2. \end{cases}$$

Отметим, что иногда система может состоять только из неравенств или только из уравнений.

Иногда вместо какого-либо уравнения или неравенства в системе записывают множество его решений. Так, например, вместо неравенства $\sin x \neq 0$ можно записать $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а вместо уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ записать $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ и т. п.

Приведем примеры таких систем:

$$\begin{cases} x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ \dfrac{x+2}{x-3} > \dfrac{x+4}{x-5} \\ 2x - 3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ \cos x > 0 \\ \log_5(x^2-1) \geqslant 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |x-5| = \lg(\sin x) \\ \sqrt{x-3} < 1 \\ x \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

Иногда решение уравнения или неравенства в системе записывают в виде условий, указывающих, какому числовому множеству принадлежат значения некоторой функции от x.

Ниже приведены примеры таких систем:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x > 3 \\ \log_5(x^2-1) \in [0;\ 1], \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(\sin x) > 0 \\ 2^{x^2 - x + 1} - \sqrt{x-3} \in (-1;\ 1). \end{cases}$$

Число x_0 называют **решением системы**, если это число удовлетворяет каждому из уравнений, неравенств и других условий системы.

Например, число $x_0 = 0$ является решением системы

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ \sin x = 0 \\ \dfrac{x-5}{x-2} \geqslant 1. \end{cases}$$

Решить систему — значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Замечание. Так как при решении уравнений, неравенств и систем рассматриваются только случаи, когда решение — действительное число, то обычно условие $x \in \boldsymbol{R}$ в системах опускают.

Две системы называют **равносильными**, если каждое решение первой системы является решением второй системы, а каждое решение второй системы является решением первой системы.

Например, равносильны следующие системы:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Говорят, что **уравнение (неравенство) равносильно системе**, если каждое решение уравнения (неравенства) является решением системы, а каждое решение системы является решением уравнения (неравенства).

Например, уравнение $\dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{x+5}{x-4}$ равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)(x-4) = (x+5)(x-3) \\ x - 3 \neq 0 \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

а неравенство $\log_2(3x-1) \leqslant 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 3x - 1 \leqslant 2. \end{cases}$$

Пусть дано несколько систем с неизвестным x и пусть требуется найти все числа x, каждое из которых является решением хотя бы одной из этих систем. Тогда говорят, что дана совокупность систем, а любое такое число x называют решением совокупности систем. Решить совокупность систем — значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Отметим, что множество решений совокупности систем есть объединение множеств решений этих систем.

Говорят, что **уравнение (неравенство) равносильно совокупности нескольких систем**, если любое решение уравнения (неравенства) является решением совокупности систем, а любое решение совокуп-

ности систем является решением уравнения (неравенства), т. е. если совпадают множества решений уравнения (неравенства) и совокупности систем.

ПРИМЕР 1. Уравнение $|x+1| = 2x-3$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+1 = 2x-3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 2x-3. \end{cases} \quad (1)$$

ПРИМЕР 2. Неравенство $(x-1)(x-2) > 0$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Иногда для записи совокупности систем их записывают друг под другом и объединяют квадратной скобкой.

Так, например, совокупность систем (1) записывают так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+1 = 2x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 2x-3, \end{cases} \end{array}\right.$$

а совокупность систем (2) записывают так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Иногда для записи равносильности уравнения (неравенства) совокупности систем применяют знак равносильности $\Leftrightarrow$.

Так, например, равносильность уравнения и совокупности систем в примере 1 записывают так:

$$|x+1| = 2x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+1 = 2x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 2x-3, \end{cases} \end{array}\right.$$

а равносильность неравенства и совокупности систем в примере 2 записывают так:

$$(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Понятие совокупности используют не только для систем, но и для уравнений (неравенств). Так, например, говорят, что уравнение $|x| = 2$ равносильно совокупности уравнений $x = 2$ и $x = -2$, т. е.

$$|x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2, \end{array}\right.$$

а неравенство $|x| > 2$ равносильно совокупности неравенств $x > 2$ и $x < -2$, т. е.

$$|x| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$$ ●

9.1° а) В каком случае говорят, что дана система уравнений и неравенств?
б) Как записывают систему уравнений и неравенств?
в) Какое число называют решением системы?
г) Что значит решить систему?

9.2 а) В каком случае говорят, что две системы равносильны?
б) В каком случае говорят, что уравнение (неравенство) равносильно системе?

9.3 Запишите систему неравенств, равносильную неравенству:
а) $|x| < 5$; б) $|x| \leqslant 4$.

9.4° а) В каком случае говорят, что дана совокупность нескольких систем?
б) В каком случае говорят, что уравнение (неравенство) равносильно совокупности нескольких систем?
в) Как записывают равносильность уравнения (неравенства) системе?

9.5 Запишите совокупность уравнений, равносильную уравнению:
а) $|x| = 5$; б) $|x| = 4$.

9.6 Запишите совокупность неравенств, равносильную неравенству:
а) $|x| > 5$; б) $|x| > 4$.

9.7 Равносильно ли уравнение $|x + 2| = 2x + 3$ совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ x + 2 = 2x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 < 0 \\ -x - 2 = 2x + 3? \end{cases} \end{array}\right.$$

9.2 Решение уравнений с помощью систем

1. Для любого четного числа $2m$ ($m \in N$) уравнение $\sqrt[2m]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2m} \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sqrt{2x+29} = 3 - x. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 2x + 29 = (3 - x)^2 \\ 3 - x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив квадратное уравнение, найдем два его корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = 10$. Очевидно, что первый из них удовлетворяет неравенству $3 - x \geqslant 0$, а второй — нет. Следовательно, система (2) имеет единственное решение x_1, которое является единственным решением уравнения (1), равносильного системе (2).

Ответ. -2.

2. Для любого четного числа $2m$, $m \in N$ уравнение

$$\sqrt[2m]{f(x)} = \sqrt[2m]{g(x)}$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Замечание. В этой системе любое из неравенств можно опустить.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sqrt[12]{x^2 - 2x - 7} = \sqrt[12]{2x^2 - 9x - 15}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 7 = 2x^2 - 9x - 15 \\ x^2 - 2x - 7 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) имеет единственное решение $x_1 = 8$. Следовательно, уравнение (3), равносильное системе (4), имеет единственное решение x_1.

Ответ. 8.

3. Пусть число a таково, что $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Замечание. В системе (5) любое из неравенств можно опустить.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\lg(x^2-4)=\lg(6x+4). \tag{6}$$

Уравнение (6) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-4=6x+4 \\ 6x+4>0. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение системы (7) имеет два корня: $x_1=3+\sqrt{17}$ и $x_2=3-\sqrt{17}$. Так как $6x_1+4=22+6\sqrt{17}>0$, $6x_2+4=22-6\sqrt{17}<0$, то система (7), а значит, и равносильное ей уравнение (6) имеют по единственному решению x_1.

Ответ. $3+\sqrt{17}$.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{2\sqrt{2}} \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0. \end{cases} \tag{9}$$

Поскольку для любого α справедливы формулы $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, то система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1-\cos x)=0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos x=1 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0. \end{cases} \tag{11}$$

Решения уравнения системы (11) задаются серией $x_n=2\pi n$, $n\in Z$. Так как $\cos\left(x_n+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, то все числа x_n являются решениями системы (11) и, следовательно, равносильного ей уравнения (8).

Ответ. $2\pi n$, $n\in Z$. ●

4. Уравнение $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$
где $D(\varphi)$ — область существования функции $\varphi(x)$.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение
$$\lg(x^2 + 2x - 4) + 4^x + 8 = 6 \cdot 2^x + \lg(x^2 + 2x - 4). \qquad (12)$$
Уравнение (15) равносильно системе
$$\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \\ x^2 + 2x - 4 > 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Уравнение системы (13) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$. Первый из них удовлетворяет неравенству системы (13), а второй — нет. Следовательно, система (13), а значит, и равносильное ей уравнение (12) имеют по единственному решению x_1.

Ответ. 2.

9.8* Докажите справедливость утверждений 1—4.

Решите уравнение **(9.9—9.14)**:

9.9 а) $\sqrt{2x+1} = x - 1$; б) $\sqrt{2x-1} = x - 2$;
в) $\sqrt{147 - 2x} = x - 2$; г) $\sqrt{-8x + 108} = x - 3$.

9.10 а) $x^2 - 1 = \sqrt{-2x}$; б) $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x+1}$;
в) $\sqrt{x^2 - 7} = \sqrt{-2x - 6}$; г) $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{1 - x}$.

9.11 а) $\sqrt{x^3 - 5x^2 + 7x - 17} = \sqrt{x^3 - 4x^2 - 3x + 4}$;
б) $\sqrt{x^3 - 8x^2 - 7x + 2} = \sqrt{x^3 - 7x^2 - 18x + 20}$.

9.12 а) $\sqrt{\log_3 x + 1} = \sqrt{\log_3^2 x - 5}$; б) $\sqrt{2\log_4 x} = \sqrt{\log_4^2 x - 8}$;
в) $\sqrt{1 - 4\log_{\frac{1}{2}} x} = \sqrt{6 - \log_{\frac{1}{2}}^2 x}$; г) $\sqrt{2 - \log_{\frac{1}{3}} x} = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4}$.

9.13 а) $\lg(x^2 - 17) = \lg(11x - 45)$; б) $\lg(x^2 - 7x + 14) = \lg(3x - 16)$;
в) $\lg(25 - x^2) = \lg(2x - 10)$; г) $\lg(x^2 - 5x - 24) = \lg(8 - x)$.

9.14 а) $\lg(x^2 - x - 6) + 4^x + 16 = 17 \cdot 2^x + \lg(x^2 - x - 6)$;
б) $\sqrt{x^2 - 9} + \lg(x^2 + 3x) = 1 + \sqrt{x^2 - 9}$;
в) $\sqrt{-x^2 + 4x - 3{,}5} + 9^x + 243 = 36 \cdot 3^x + \sqrt{-x^2 + 4x - 3{,}5}$;
г) $\lg(x^2 + 21x) + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = 2 + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

9.3. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

5. Множество решений уравнения

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0 \qquad (1)$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ x \in D(f_2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0 \\ x \in D(f_1), \end{cases} \qquad (2)$$

где $D(f_1)$ — область существования функции $f_1(x)$, а $D(f_2)$ — область существования функции $f_2(x)$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x}\,(x+1) = 0. \qquad (3)$$

Множество решений уравнения (3) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет единственное решение $x_1 = 0$, а вторая не имеет решений.

Следовательно, уравнение (3) имеет единственное решение x_1.

Ответ. 0.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x - 1) = 0. \qquad (4)$$

Множество решений уравнения (4) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \qquad (5)$$

и

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - 1 = 0 \\ x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \qquad (6)$$

Уравнение системы (5) имеет серию решений $x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Ни одно из чисел x_k не удовлетворяет второму условию этой системы, значит, система (5) не имеет решений.

Уравнение системы (6) имеет серию решений $x_n = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, каждое из которых удовлетворяет второму условию этой системы. Значит, только числа x_n являются решениями системы (6). Следовательно, только числа x_n являются решениями и уравнения (4).

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим, что если использовать понятие совокупности систем, то утверждение 5 можно сформулировать так:

Уравнение (1) равносильно совокупности систем (2).

Доказательство. Пусть число x_0 — любое решение уравнения (1). Это означает, что имеют смысл оба числовых выражения $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ и хотя бы одно из них равно нулю. Иными словами, число x_0 есть либо решение уравнения $f_1(x) = 0$, входящее в область существования функции $f_2(x)$, либо решение уравнения $f_2(x) = 0$, входящее в область существования функции $f_1(x)$. Следовательно, число x_0 есть решение хотя бы одной из систем (2).

Итак, любое решение уравнения (1) является решением совокупности систем (2).

Если же число x_1 есть любое решение совокупности систем (2), то либо $f_1(x_1) = 0$ и выражение $f_2(x_1)$ имеет смысл, либо $f_2(x_1) = 0$ и выражение $f_1(x_1)$ имеет смысл. Это означает, что число x_1 является решением уравнения (1).

Итак, любое решение совокупности систем (2) является решением уравнения (1).

Можно показать (методом от противного), что если уравнение (1) не имеет решений, то и совокупность систем (2) не имеет решений, а если не имеет решений совокупность систем (2), то не имеет решений и уравнение (1).

Следовательно, во всех рассматриваемых случаях множество решений уравнения (1) совпадает с множеством решений совокупности систем (2).

Утверждение 5 доказано полностью.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\log_2(3 + 2x - x^2)\sin\sqrt{x} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \log_2(3 + 2x - x^2) = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

и

$$\begin{cases} \sin\sqrt{x} = 0 \\ 3 + 2x - x^2 > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 = 1 \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $x_1 = 1 + \sqrt{3}$. Поэтому система (8) имеет единственное решение x_1.

Система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z} \\ -1 < x < 3. \end{cases} \tag{10}$$

Для $n < 0$ ни одно из уравнений $\sqrt{x} = \pi n$ не имеет корней. Для $n \geqslant 0$ каждое из уравнений $\sqrt{x} = \pi n$ имеет единственное решение $x_n = (\pi n)^2$, $n = 0; 1; 2; \ldots$. Из этих чисел x_n неравенству системы (10) удовлетворяет лишь одно число $x_0 = 0$. Поэтому система (10), а значит, и равносильная ей система (9) имеют единственное решение x_2.

Следовательно, совокупность систем (8) и (9), а значит, и уравнение (7) имеют по два решения x_1 и x_0.

Ответ. $1 + \sqrt{3}$; 0. ●

6. Уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{\cos 4x}{\cos x}. \tag{11}$$

Перенося все члены уравнения в левую часть и применяя формулы синуса разности двух углов и синуса двойного угла, перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases} \tag{13}$$

Все решения уравнения системы (13) задаются серией $x_k = \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как

$$\sin 2x_k = \sin 2\pi n = 0 \text{ при } k = 3n,$$

$$\sin 2x_k = \sin\left(2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0 \text{ при } k = 3n + 1,$$

$$\sin 2x_k = \sin\left(2\pi n - \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0 \text{ при } k = 3n - 1,$$

то неравенство системы (13) выполняется лишь при условии $k \neq 3n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, система (13), а значит, и равносильное ей уравнение (11) имеют две серии решений: $x_n = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и

$x_n = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, которые можно объединить в одну серию: $x_n = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим, что под записью $g(x) \neq 0$ понимают множество всех таких чисел x, каждое из которых удовлетворяет условиям: 1) выражение $g(x)$ определено; 2) число $g(x) \neq 0$.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x-2}} = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} \neq 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Уравнение системы (15) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Так как число $x_1 - 2 = 1 > 0$, то определено выражение $\sqrt{x_1 - 2}$ и $\sqrt{x_1 - 2} = 1 \neq 0$, поэтому число x_1 является решением системы (15). Так как число $x_2 - 2 = -1 < 0$, то не определено выражение $\sqrt{x_2 - 2}$, и поэтому число x_2 не является решением системы (15).

Следовательно, система (15), а значит, и равносильное ей уравнение (14) имеют по единственному решению x_1.

Ответ. 3.

Иногда при решении уравнения приходится применять несколько преобразований, приводящих к системе, равносильной исходному уравнению. Рассмотрим примеры применения нескольких преобразований, приводящих к системам. Решение запишем с помощью знака равносильности ($\Leftrightarrow$) и знаков совокупности ([) и системы ({).

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$\sqrt{\frac{x^3+5}{x-1}} = x + 1.$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{x^3+5}{x-1}} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3+5}{x-1} = (x+1)^2 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+5 = (x+1)^2(x-1) \\ x-1 \neq 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x \neq 1 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-2;\ 3\} \\ x \neq 1 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ. 3.

ПРИМЕР 7. Решим уравнение

$$(\cos 2x - 2\cos x + 1)\sqrt{\log_3(x+5) - 2} = 0.$$

Решение.

$$(\cos 2x - 2\cos x + 1)\sqrt{\log_3(x+5) - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x - 2\cos x + 1 = 0 \\ \log_3(x+5) - 2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(x+5) - 2 = 0 \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \\ x + 5 \geqslant 9 \end{cases} \\ x + 5 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 0 \\ x \geqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 1 \\ x \geqslant 4 \end{cases} \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ x \geqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \\ x \geqslant 4 \end{cases} \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{N} \\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{N} \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Ответ. $4;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{N};\ 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{N}.$ ●

9.15* Докажите справедливость утверждения 6.

Решите уравнение **(9.16—9.23)**:

9.16 а) $(\sqrt{36x^2+7} - \sqrt{35x^2+16})\sqrt{2-x} = 0;$

б) $(\sqrt{26x^2+1} - \sqrt{25x^2+17})\sqrt{3-x} = 0.$

9.17 а) $(x^2 - 7x + 12)\log_{31}(x+5) = 0;$

б) $(x^2 + 3x - 4)\log_{32}(3x+7) = 0.$

9.18 а) $\sin x \log_{11}(4 - x^2) = 0;$ б) $\cos x \log_{12}(9 - x^2) = 0;$

в) $\operatorname{tg} x \log_{13}(x^2 - x - 6) = 0;$ г) $\operatorname{ctg} x \log_{14}(x^2 + x - 12) = 0.$

9.19 а) $(\cos 2x - 3\cos x - 1)\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 2} = 0;$

б) $(\cos 2x + 7\cos x + 4)\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 1} = 0;$

в) $(4^{4-x} - 2^{x-1})\log_2 x = 0;$ г) $(4^{5-x} - 2^{x-1})\log_3 x = 0.$

9.20 а) $\sin x(\operatorname{tg} x - 1) = 0;$ б) $\operatorname{tg} x(\sin x - 1) = 0;$

в) $(\operatorname{tg} x + 1)\cos x = 0;$ г) $(\operatorname{ctg} x - 1)\sin x = 0.$

9.21 а) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x-5}} = 0;$ б) $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{\sqrt{x+2}} = 0;$

в) $\dfrac{x^2 - x + 72}{\sqrt{5-x}} = 0;$ г) $\dfrac{x^2 - x + 72}{\sqrt{2-x}} = 0.$

9.22 а) $\dfrac{2x^2+x-15}{\sqrt{4x^2-2x+25}}=0$; б) $\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{9x^2+12x+4}}=0$;

в) $\dfrac{2x^2+9x-18}{\sqrt{4x^2-12x+9}}=0$; г) $\dfrac{3x^2-19x+20}{\sqrt{9x^2-24x+16}}=0$.

9.23 а) $\dfrac{\sin 2x}{x}=0$; б) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}+\dfrac{\cos 2x}{\cos x}=0$.

9.24* Докажите, что равносильны уравнение и система:

а) $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a(f(x)\cdot g(x))$ и $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0, \end{cases}$ где $a>0$, $a\neq 1$.

б) $\log_{g(x)} f(x)=\log_{g(x)}\varphi(x)$ и $\begin{cases} f(x)=\varphi(x) \\ f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1. \end{cases}$

9.25* Докажите, что равносильны уравнение и совокупность двух систем:

а) $|f(x)|=g(x)$; $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)=-g(x) \\ g(x)\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)+g(x)}$; $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Решите уравнение **(9.26—9.32)**:

9.26* а) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=\log_2(x^2-5x+6)$;

б) $\log_3(x-3)+\log_3(4-x)=\log_3(-x^2+7x-12)$;

в) $\lg(x^2-5x+6)+\lg(5x-x^2-4)=\lg((x^2-5x+6)(5x-x^2-4))$.

9.27* а) $\log_x(2x^2-2x-3)=2$; б) $\log_x(x^3-5x+7)=3$;

в) $\log_x(x+2)=2$; г) $\log_x(x+6)=2$.

9.28* а) $|x^2-4x+2|=-x^2+6x-6$; б) $|x^2-2x-1|=-x^2+4x-1$;

в) $|x^2-2^x-8|=x^2+2^x-10$; г) $|x^2-3^x-1|=x^2+3^x-7$.

9.29* а) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+1}$;

в) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x}$; г) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-1}$.

9.30* а) $\sqrt{2^x-4}+\sqrt{2^x-8}=\sqrt{2^{x+1}-12}$;

б) $\sqrt{3^x-9}+\sqrt{3^x-3}=\sqrt{2\cdot 3^x-12}$;

в) $\sqrt{\log_5 x - 1} + \sqrt{2^x - 2} = \sqrt{\log_5 x + 2^x - 3}$;

г) $\sqrt{\log_6 x - 1} + \sqrt{3^x - 9} = \sqrt{\log_6 x + 3^x - 10}$.

9.31* а) $\log_{1-x}(7x^2 + 2) = \log_{1-x} 30$; б) $\log_{2-x}(3x^2 - 1) = \log_{2-x} 74$;
в) $\log_{3-x}(4x^2 - 5) = \log_{3-x} 59$; г) $\log_{4-x}(2x^2 + 3) = \log_{4-x} 75$.

9.32* а) $\log_{x-1}(x^2 + 2x) = \log_{x-1}(2x^2 - 8x + 16)$;
б) $\log_{x-2}(2x^2 - 9x + 21) = \log_{x-2}(x^2 + x)$.

9.33 Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sin\frac{\pi x}{3}(\lg(x + 5) + \lg(400 - x)) = 0$;

б) $\cos\frac{\pi(x - 3)}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{4} - 1\right)\left(200 - \frac{3x}{2}\right)} = 0$;

в) $\sin\frac{\pi x}{4}(\lg(x + 3) + \lg(300 - x)) = 0$;

г) $\cos\frac{\pi(x - 2)}{4}\sqrt{\left(\frac{x}{8} + 1\right)\left(150 - \frac{2x}{3}\right)} = 0$?

9.34* При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x}{x - a} + \frac{1}{x + a} = \frac{2}{x^2 - a^2}$ имеет единственный корень?

9.4*. Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

1. Пусть область существования функции $f(u)$ есть промежуток M и пусть эта функция строго монотонна (т. е. возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение

$$f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) \qquad (1)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \in M \\ \beta(x) \in M. \end{cases} \qquad (2)$$

Замечание. В системе (2) любое из условий $\alpha(x) \in M$ или $\beta(x) \in M$ можно опустить.

Доказательство. Если число x_0 — решение уравнения (1), то для него имеют смысл числовые выражения $u_1 = \alpha(x_0)$ и $u_2 = \beta(x_0)$, каждое из которых принадлежит области существования функции $f(u)$, т. е. промежутку M, и $f(u_1) = f(u_2)$. Покажем, что отсюда следует равенство $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$. Пусть функция $f(u)$ возрастает на промежутке M. Тогда если $u_1 < u_2$, то $f(u_1) < f(u_2)$; если $u_1 > u_2$, то $f(u_1) > f(u_2)$,

что противоречит условию $f(u_1) = f(u_2)$. Следовательно, действительно $u_1 = u_2$, т. е. $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$.

Аналогично показывается, что $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, если функция $f(u)$ убывает на промежутке M. Сказанное выше означает, что любое решение уравнения (1) является решением системы (2).

Пусть теперь число x_1 является решением системы (2). Это означает, что имеют смысл числовые выражения $u_1 = \alpha(x_1)$ и $u_2 = \beta(x_1)$, причем $u_1 = u_2 \in M$. Тогда так как функция определена на промежутке M, то справедливо равенство $f(u_1) = f(u_2)$. Справедливость равенства $f(\alpha(x_1)) = f(\beta(x_1))$ означает, что число x_1 есть решение уравнения (1). Сказанное выше означает, что любое решение системы (2) является решением уравнения (1).

Таким образом, показано, что уравнение (1) и система (2) равносильны в случае, если известно, что либо уравнение, либо система имеют решения.

Покажем, что если уравнение (1) не имеет решений, то и система (2) не имеет решений. Предположим противное, т. е. что система (2) имеет решения, но тогда, по доказанному выше, и уравнение (1) имеет решение, а это противоречит условию, что уравнение (1) не имеет решений. Аналогичными рассуждениями показывается, что если не имеет решений система (2), то и уравнение (1) не имеет решений. Следовательно, и в этом случае уравнение (1) равносильно системе (2).

Утверждение полностью доказано.

В качестве следствий этого утверждения получим утверждения 2 и 3 из п. 9.2.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\arccos(x^2 - 15) = \arccos(x + 5). \qquad (3)$$

Область существования функции $f(u) = \arccos u$ есть промежуток $[-1; 1]$. Так как функция на этом промежутке убывает, то уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 15 = x + 5 \\ -1 \leqslant x + 5 \leqslant 1. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет два решения: $x_1 = -4$ и $x_2 = 5$. Число x_1 удовлетворяет неравенству системы, а число x_2 — нет. Следовательно, система, а значит, и равносильное ей уравнение (3) имеют по единственному решению x_1.

Ответ. -4.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\sqrt[6]{\sin x} + \sqrt[3]{\sin x} + \sqrt{\sin x} = \sqrt[6]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt{\cos x}. \qquad (4)$$

Область существования функции $f(u) = \sqrt[6]{u} + \sqrt[3]{u} + \sqrt{u}$ есть промежуток $[0; +\infty)$. Так как эта функция возрастает на этом промежутке, то уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Уравнение системы (5) имеет серию решений

$$x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\sin x_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$, то при любом $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, число x_n удовлетворяет неравенству системы (5), а при любом $n = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$, число x_n не удовлетворяет этому неравенству. Это означает, что система (5), а значит, и равносильное ей уравнение (4) имеют серию решений $x_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим частный случай утверждения 1.

2. Пусть $\boldsymbol{R}$ — область существования функции $f(u)$ и пусть эта функция строго монотонна на $\boldsymbol{R}$, тогда равносильны уравнения $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ и $\alpha(x) = \beta(x)$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x + 5} - \sqrt[9]{x^2 - 2x + 5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - 3x - 1} - \sqrt[9]{2x^2 - 3x - 1}. \qquad (6)$$

Область существования функции $f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u + \sqrt[9]{-u}$ есть $\boldsymbol{R}$. Так как эта функция убывает на $\boldsymbol{R}$, то уравнение (6) равносильно уравнению

$$x^2 - 2x + 5 = 2x^2 - 3x - 1. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, тогда и равносильное ему уравнение (6) имеет те же корни.

Ответ. -2; 3.

9.35 Докажите, что каждое из уравнений $\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$ и $\arccos f(x) = \arccos g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant g(x) \leqslant 1. \end{cases}$$

9.36° Какое из неравенств в системе (задание **9.35**) можно опустить? Почему?

9.37 Докажите, что каждое из уравнений $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x)$ и $\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решите уравнение (**9.38—9.42**):

9.38 а) $\arcsin(x^2 - 80{,}5) = \arcsin(x - 8{,}5)$;
б) $\arccos(x^2 - 9) = \arccos(7x + 21)$;
в) $\operatorname{arctg}(x^2 - 1) = \operatorname{arctg}(5x - 5)$;
г) $\operatorname{arcctg}(x^2 - 1) = \operatorname{arcctg}(6x - 6)$.

9.39 а) $\log_{0,5} \operatorname{tg} x + \left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg} x} - \sqrt[7]{\operatorname{tg} x} = \log_{0,5} \operatorname{ctg} x + \left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{ctg} x} - \sqrt[7]{\operatorname{ctg} x}$;

б) $\log_{0,2} \sin x - 5^{\sin x} - \sqrt[4]{\sin x} = \log_{0,2}(-\cos x) - 5^{-\cos x} - \sqrt[4]{-\cos x}$.

9.40 а) $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt[4]{x^2 - 3} = \sqrt{x + 1} + \sqrt[4]{x + 3}$;

б) $\sqrt[4]{x^2 - x - 3} + \sqrt{x^2 - x + 5} = \sqrt[4]{2x + 1} + \sqrt{2x + 9}$;

в) $\sqrt{\sin x - 0{,}1} + \sqrt[4]{\sin x + 0{,}9} = \sqrt{\cos x + 0{,}9} + \sqrt[4]{\cos x + 1{,}9}$;

г) $\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x + 1} = \sqrt[4]{2 - \operatorname{ctg} x} + \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x}$.

9.41 а) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt[4]{x^2 + 5} + \sqrt[6]{x^2 + 6} = \sqrt{4x} + \sqrt[4]{4x + 1} + \sqrt[6]{4x + 2}$;

б) $\sqrt{x + 1} + \sqrt[4]{2x + 3} + \sqrt[6]{3x + 7} = \sqrt{2x} + \sqrt[4]{4x + 1} + \sqrt[6]{6x + 4}$.

9.42 а) $e^{x^2 - 4x + 5} + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 5} = e^{2x^2 - 3x + 7} + \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 7}$;

б) $\pi^{x^2 + 1000} + \sqrt[9]{x^2 + 1000} = \pi^{2002x - 1001} + \sqrt[9]{2002x - 1001}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[5]{\cos x}$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - (\sin x)^{2001} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2 x} - (\sin x)^{4002}$.

9.5. Решение неравенств с помощью систем

1. Для любого четного числа $2m$ ($m \in N$) неравенство

$$\sqrt[2m]{f(x)} < g(x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2m} \\ f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\sqrt{5-x^2} < x-1. \qquad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 5-x^2 < (x-1)^2 \\ 5-x^2 \geqslant 0 \\ x-1 > 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x^2-x-2 > 0 \\ 1 < x \leqslant \sqrt{5}. \end{cases} \qquad (2)$$

Все решения системы (2) составляют промежуток $(2; \sqrt{5}]$.

Следовательно, все решения неравенства (1), равносильного системе (2), составляют тот же промежуток.

Ответ. $(2; \sqrt{5}]$.

2. Для любого четного числа $2m$ ($m \in N$) множество решений неравенства

$$\sqrt[2m]{f(x)} > g(x) \qquad (3)$$

есть объединение множеств решений систем

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2m} \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$4\sqrt{x+6} > x+1. \qquad (5)$$

Множество решений неравенства (5) есть объединение множеств решений двух систем $\begin{cases} 16(x+6) > (x+1)^2 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+6 \geqslant 0 \\ x+1 < 0. \end{cases}$

Все решения первой системы составляют промежуток $[-1; 19)$, а все решения второй системы составляют промежуток $[-6; -1)$.

Следовательно, все решения неравенства (5) составляют множество $[-6; -1) \cup [-1; 19) = [-6; 19)$.

Ответ. $[-6; 19)$.

Используя понятие совокупности систем, утверждение 2 можно переформулировать так:

Для любого четного числа $2m$ ($m \in N$) неравенство (3) равносильно совокупности систем (4).

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sqrt{5x+1} > 2x-2.$$

Решение.

$$\sqrt{5x+1} > 2x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+1 > (2x-2)^2\\ 2x-2 \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}5x+1 \geqslant 0\\ 2x-2 < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2-13x+3 < 0\\ x \geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant -0{,}2\\ x < 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 \leqslant x < 3\\ -0{,}2 \leqslant x < 1\end{array}\right. \Leftrightarrow -0{,}2 \leqslant x < 3.$$

Ответ. $[-0{,}2;\ 3)$. ●

3. Для любого четного числа $2m$ $(m \in N)$ неравенство

$$\sqrt[2m]{f(x)} < \sqrt[2m]{g(x)}$$

равносильно двойному неравенству

$$0 \leqslant f(x) < g(x).$$

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\sqrt[6]{\frac{x+3}{x+2}} < \sqrt[6]{x+5}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) равносильно двойному неравенству

$$0 \leqslant \frac{x+3}{x+2} < x+5,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+6x+7}{x+2} > 0\\ \dfrac{x+3}{x+2} \geqslant 0.\end{cases}$$

Множество решений системы есть объединение двух промежутков: $(-3-\sqrt{2};\ -3]$ и $(-3+\sqrt{2};\ +\infty)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (6), равносильного системе, есть множество $(-3-\sqrt{2};\ -3] \cup (-3+\sqrt{2};\ +\infty)$.

Ответ. $(-3-\sqrt{2};\ -3] \cup (-3+\sqrt{2};\ +\infty)$.

4. Неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

при $a > 1$ равносильно двойному неравенству

$$f(x) > g(x) > 0,$$

а при $0 < a < 1$ равносильно двойному неравенству

$$0 < f(x) < g(x).$$

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - x^2 - 2x) > \log_{0,5}(x^3 - 3). \qquad (7)$$

Неравенство (7) равносильно двойному неравенству

$$0 < x^3 - x^2 - 2x < x^3 - 3,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x(x^2 - x - 2) > 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства системы есть объединение двух промежутков: $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$, множество решений второго неравенства системы также является объединением двух промежутков: $(-1; 0)$ и $(2; +\infty)$. Поэтому множество решений системы составляет промежуток $(2; +\infty)$. Следовательно, множество решений неравенства (5), равносильного системе, составляет тот же промежуток.

Ответ. $(2; +\infty)$.

5. Неравенство

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) > 0$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ — область существования функции $\varphi(x)$.

ПРИМЕР 6. Решим неравенство

$$x^2 + 2\sqrt{x} - 1 < (\sqrt{x} + 1)^2. \qquad (8)$$

Применяя формулу квадрата суммы, перенося все члены неравенства в левую часть и приводя подобные члены, получим, что неравенство (8) равносильно системе $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Множество решений системы, а значит, и равносильного ей неравенства (8) есть промежуток $[0; 2)$.

Ответ. $[0; 2)$.

9.43* Докажите справедливость утверждений 1—5.

Решите неравенство (9.44—9.50):

9.44 а) $\sqrt{2x-1} < x-2$; б) $\sqrt{2x+1} < x-1$.

9.45 а) $\sqrt{2x-1} > x-2$; б) $\sqrt{2x+1} > x-1$.

9.46 а) $\sqrt[4]{x^2-11x+31} > \sqrt[4]{x-4}$; б) $\sqrt[10]{x^2-9} > \sqrt[10]{9x+1}$;

в) $\sqrt[8]{x^2-36} > \sqrt[8]{5x}$; г) $\sqrt[4]{x+19} > \sqrt[4]{49-x^2}$.

9.47* а) $\sqrt[8]{x^2+\sqrt{x}} \geqslant \sqrt[8]{5x-4+\sqrt{x}}$; б) $\sqrt[6]{x^2+\sqrt{x}} \geqslant \sqrt[6]{3x-2+\sqrt{x}}$;

в) $\sqrt[10]{x^2-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt[10]{5x-4-\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[12]{x^2-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt[12]{3x-2-\sqrt{x}}$.

9.48 а) $\log_2(x^2-5x-34) > \log_2(x+6)$;

б) $\log_{0,5}(x^2-16) > \log_{0,5}(3x+38)$;

в) $\log_3(x^2-4) < \log_3(44-2x)$;

г) $\log_{0,5}(x^2-22) < \log_{0,5}(3x+18)$.

9.49 а) $\log_2(x-2)+\sqrt{3-x} < 3+\sqrt{3-x}$;

б) $\log_2(x-2)+\sqrt{3-x} < \log_2(x-2)+2$.

9.50 а) $9^x+1+\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} < 10\cdot 3^{x-1}+\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$;

б) $4^x+2+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} < 9\cdot 2^{x-1}+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

9.6. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

6. Множество решений каждого из неравенств

$$f(x)\cdot g(x) > 0 \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad (1)$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

7. Множество решений каждого из неравенств

$$f(x)\cdot g(x) < 0 \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \qquad (3)$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\cos x \cdot \lg(x+1) < 0. \qquad (5)$$

Множество решений неравенства (5) есть объединение множеств решений двух систем $\begin{cases}\cos x > 0\\ \lg(x+1) < 0\end{cases}$ и $\begin{cases}\cos x < 0\\ \lg(x+1) > 0.\end{cases}$

Множество решений первой системы есть интервал $(-1;\ 0)$, а все решения второй системы составляют серию промежутков

$$\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Следовательно, все решения неравенства (5) составляют объединение найденных промежутков.

Ответ. $(-1;\ 0);\ \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{N}.$

Используя понятие совокупности систем, утверждения 6 и 7 можно переформулировать так:

6′. Каждое из неравенств (1) равносильно совокупности систем (2).

7′. Каждое из неравенств (3) равносильно совокупности систем (4).

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\frac{\lg(4x+7) - \lg 8}{4 + 3x - x^2} > 0. \qquad (6)$$

Решение.

$$\frac{\lg(4x+7) - \lg 8}{4 + 3x - x^2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lg(4x+7) - \lg 8 > 0\\ 4 + 3x - x^2 > 0\end{cases}\\ \begin{cases}\lg(4x+7) - \lg 8 < 0\\ 4 + 3x - x^2 < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lg(4x+7) > \lg 8\\ x^2 - 3x - 4 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}\lg(4x+7) < \lg 8\\ x^2 - 3x - 4 > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{4} < x < 4\\ -\frac{7}{4} < x < -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{4};\ -1\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ 4\right).$$

Ответ. $\left(-\frac{7}{4};\ -1\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ 4\right).$ ●

9.51* Докажите справедливость утверждений 6 и 7.

9.52* Докажите справедливость утверждений:

а) Неравенство $|f(x)| < g(x)$ равносильно двойному неравенству $-g(x) < f(x) < g(x)$.

б) Неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности двух неравенств $f(x) > g(x)$ и $f(x) < -g(x)$.

в) Неравенство $\log_{g(x)} f(x) < \log_{g(x)} \varphi(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 0 < f(x) < \varphi(x) \\ g(x) > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) > \varphi(x) > 0 \\ 0 < g(x) < 1. \end{cases}$$

Решите неравенство **(9.53—9.64):**

9.53 а) $(1-x)\lg(x+2) < 0$; б) $(2-x)\log_{0,5}(x+3) > 0$;
в) $(x-3)\log_5(5-x) < 0$; г) $(4+x)\log_{0,2}(3-x) > 0$.

9.54 а) $(3-\sqrt{10-x})(\sqrt{x}-2) < 0$; б) $(2-\sqrt{9-x})(\sqrt{x}-1) > 0$;
в) $(\sqrt{3-x}-1)\lg x < 0$; г) $(\sqrt{x}-1)\lg(3-x) < 0$.

9.55 а) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1} > 0$; б) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-x} < 0$; в) $\dfrac{\sqrt{-x}-2}{-2-x} > 0$; г) $\dfrac{\sqrt{-x}-3}{x+2} < 0$.

9.56 а) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3}{3^x - 3} < 0$; б) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{2^x - 16} < 0$; в) $\dfrac{2^x - 8}{\lg x} > 0$; г) $\dfrac{2^x - \frac{1}{2}}{\lg(3-x)} < 0$.

9.57 а) $\dfrac{\log_2(x-3)}{\log_{0,5}(x+2)} > 0$; б) $\dfrac{\log_{0,3}(x-3)}{\lg(x+4)} > 0$;

в) $\dfrac{\log_{0,2}(x+2)}{\log_5(3-x)} > 0$; г) $\dfrac{\log_{0,25}(2-x)}{\log_4(x-4)} < 0$.

9.58* а) $|x+1| < x^2 - 2x + 1$; б) $|x+1| > x^2 + 4x + 1$;
в) $|3\sqrt{x} - 5| > \sqrt{x} - 1$; г) $|2\sqrt{x} - 7| > \sqrt{x} - 2$.

9.59* а) $|2\log_8 x - 3| < \log_8 x + 1$; б) $|2\log_3 x - 5| < \log_3 x - 1$;
в) $|2\log_2 x - 3| > \log_2 x + 3$; г) $|2\lg x - 5| < \lg x + 2$.

9.60* а) $|x| + \dfrac{1}{3x-7} \leqslant \dfrac{9x-20}{3x-7}$; б) $|x| + \dfrac{2}{2x+5} \leqslant \dfrac{6x+17}{2x+5}$;

в) $|x| - \dfrac{3}{5x-4} \leqslant \dfrac{10x-11}{5x-4}$; г) $|x| - \dfrac{4}{4x-5} \leqslant \dfrac{8x-14}{4x-5}$.

9.61* а) $|x| + \dfrac{1}{x^2+2x-8} \leqslant \dfrac{3x^2+6x-23}{x^2+2x-8}$;

б) $|x| + \dfrac{2}{x^2-3x-10} \leqslant \dfrac{4x^2-12x-38}{x^2-3x-10}$.

9.62* а) $\log_x(9x+1) < \log_x|10x-1|$;

б) $\log_x(12x+1) < \log_x|13x-1|$;

в) $\log_x(6x+1) < \log_x|7x-1|$;

г) $\log_x(17x+1) < \log_x|18x-1|$.

9.63* а) $\log_{2|x|}(x^2-10x+21) \leqslant \log_{2|x|}5$;

б) $\log_{2|x|}(x^2-13x+36) \leqslant \log_{2|x|}6$;

в) $\log_{|x|}(x^2+25) \leqslant 2+\log_{|x|}226$;

г) $\log_{|x|}(x^2+361) \leqslant 2+\log_{|x|}362$.

9.64* а) $\log_x \dfrac{8x-7}{8x+13} \geqslant \log_x \dfrac{14x-9}{8x+13}$; б) $\log_x \dfrac{9x-8}{9x+14} \geqslant \log_x \dfrac{17x-10}{9x+14}$;

в) $\log_x \dfrac{10x-9}{6x+11} \geqslant \log_x \dfrac{20x-11}{6x+11}$; г) $\log_x \dfrac{11x-10}{5x+12} \geqslant \log_x \dfrac{17x-12}{5x+12}$.

9.65* При каких значениях параметра a все решения неравенства $\sqrt{x-2a} > \sqrt{4-x}$ содержатся в интервале $(0; 5)$?

9.7* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

Пусть область существования функции $f(u)$ есть промежуток M. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если функция $f(u)$ возрастает на промежутке M, то неравенство $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) > \beta(x) \\ \alpha(x) \in M \\ \beta(x) \in M. \end{cases}$$

2. Если функция $f(u)$ убывает на промежутке M, то неравенство $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) < \beta(x) \\ \alpha(x) \in M \\ \beta(x) \in M. \end{cases}$$

В качестве следствий этого утверждения получим утверждения 3 и 4 из п. 9.5.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\arccos(x+2) > \arccos(3x+6). \qquad (1)$$

Так как область существования функции $f(u) = \arccos u$ есть промежуток $[-1; 1]$ и на этом промежутке функция $f(u)$ убывает, то неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x+2 < 3x+6 \\ -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 3x+6 \leqslant 1. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $\left(-2; -\frac{5}{3}\right]$. Следовательно, множество решений неравенства (1), равносильного системе, есть тот же промежуток.

Ответ. $\left(-2; -\frac{5}{3}\right]$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\sqrt[6]{x+2} + \log_{117}(x+2) + 31^{\frac{x+2}{2}} > \sqrt[6]{-2x+3} + \log_{117}(-2x+3) + 31^{\frac{-2x+3}{2}}. \qquad (2)$$

Область существования функции $f(u) = \sqrt[6]{u} + \log_{117} u + 31^{\frac{u}{2}}$ есть промежуток $(0; +\infty)$. Так как на этом промежутке функция $f(u)$ возрастает, то неравенство (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x+2 > -2x+3 \\ x+2 > 0 \\ -2x+3 > 0. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$. Следовательно, множество решений неравенства (2), равносильного системе, есть тот же промежуток.

Ответ. $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Отметим частный случай утверждений 1 и 2.

Пусть $\boldsymbol{R}$ — область существования функции $f(u)$, тогда:

3. Если функция $f(u)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, то равносильны неравенства $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ и $\alpha(x) > \beta(x)$.

4. Если функция $f(u)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то равносильны неравенства $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ и $\alpha(x) < \beta(x)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} + e^{\frac{x}{x-1}} < \sqrt[3]{x+2} + e^{x+2}. \qquad (3)$$

Область существования функции $f(u) = \sqrt[3]{u} + e^u$ есть $\boldsymbol{R}$. На этом множестве функция $f(u)$ возрастает, поэтому неравенство (3) равносильно неравенству $\frac{x}{x-1} < x+2$, которое можно переписать в виде

$$\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x-1} > 0. \qquad (4)$$

Множество всех решений неравенства (4), а значит, и равносильного ему неравенства (3) составляют два промежутка: $(-\sqrt{2}; 1)$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ. $(-\sqrt{2}; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

9.66 Докажите справедливость утверждений 1—4.

9.67 Докажите, что равносильны неравенство и система:

а) $\arcsin f(x) > \arcsin g(x)$ и $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant g(x) \leqslant 1; \end{cases}$

б) $\arccos f(x) > \arccos g(x)$ и $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant g(x) \leqslant 1. \end{cases}$

9.68 Какие из неравенств в системах (задание **9.67**) можно опустить? Почему?

9.69 Докажите, что равносильны неравенства:

а) $\operatorname{arctg} f(x) > \operatorname{arctg} g(x)$ и $f(x) > g(x)$;

б) $\operatorname{arcctg} f(x) > \operatorname{arcctg} g(x)$ и $f(x) < g(x)$.

Решите неравенство **(9.70—9.73)**:

9.70 а) $\arcsin(x^2 - 2x) < \arcsin(x^2 + x - 1)$;

б) $\arccos\frac{x-1}{2} < \arccos(x^2 - 4x + 3)$;

в) $\operatorname{arctg}(2x^2 + 1) > \operatorname{arctg}(2x^2 - x)$;

г) $\operatorname{arcctg}\frac{x-2}{2} > \operatorname{arcctg}\frac{4-x}{2}$.

9.71 а) $\sqrt{\log_2(x-3)} + 10^{\log_2(x-3)} < \sqrt{\log_2(x^2-3x)} + 10^{\log_2(x^2-3x)}$;

б) $\sqrt{\log_5(x+1)} + 3^{\log_5(x+1)} < \sqrt{\log_5\frac{2}{x}} + 3^{\log_5\frac{2}{x}}$.

9.72 а) $\sqrt{\log_2 \frac{x-1}{x}} + \lg\left(\log_2 \frac{x-1}{x}\right) < \sqrt{\log_2 \frac{1}{x}} + \lg\left(\log_2 \frac{1}{x}\right)$;

б) $\sqrt{\log_3 \frac{3}{x}} + \log_3 7 \cdot \log_7 \frac{3}{x} > \sqrt{\log_3 \frac{5-2x}{x}} + \log_3 7 \cdot \log_7 \frac{5-2x}{x}$;

в) $\sqrt[4]{3x-2} + \log_7(3x-2) + 3^{\frac{3x-2}{4}} > \sqrt[4]{-2x+3} + \log_7(-2x+3) + 3^{\frac{-2x+3}{4}}$.

9.73 а) $\sqrt[5]{x+2} + \pi^{x+2} > \sqrt[5]{\frac{x-1}{2x}} + \pi^{\frac{x-1}{2x}}$;

б) $(\pi-3)^{x-5} - \sqrt[3]{x-5} > (\pi-3)^{\frac{x-9}{2x}} - \sqrt[3]{\frac{x-9}{2x}}$.

§ 10. Равносильность уравнений на множествах

10.1. Основные понятия

Пусть даны два уравнения: $f(x) = g(x)$ и $p(x) = \varphi(x)$ — и пусть дано некоторое множество чисел M. Если любой корень первого уравнения, принадлежащий множеству M, является корнем второго уравнения, а любой корень второго уравнения, принадлежащий множеству M, является корнем первого уравнения, то такие два уравнения называют **равносильными на множестве** M. При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих уравнений не имеет корней на множестве M, то такие два уравнения равносильны на множестве M.

Замену одного уравнения другим уравнением, равносильным ему на множестве M, называют **равносильным переходом на множестве** M от одного уравнения к другому или **равносильным на множестве** M **преобразованием уравнения.**

Например, рассмотрим уравнения $\sqrt{x} = 1$ и $x^2 = 1$. Как отмечалось в п. 8.1, эти уравнения не являются равносильными на множестве всех действительных чисел. Но эти уравнения равносильны на множестве всех неотрицательных действительных чисел, так как на этом множестве каждое из них имеет только один корень — число 1.

Рассмотрим уравнения $2\log_2 x = 1$ и $\log_2 x^2 = 1$. Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = \sqrt{2}$, а второе имеет два корня: $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. Следовательно, эти уравнения не равносильны на множестве всех действительных чисел. Но эти уравнения равносильны на множестве всех положительных чисел, так как на этом множестве каждое из данных уравнений имеет только один корень $x_1 = \sqrt{2}$.

Если два уравнения равносильны на множестве всех действительных чисел, то в таких случаях говорят, что уравнения равносильны, опуская слова «на множестве всех действительных чисел».

Равносильные преобразования уравнений уже были рассмотрены в § 7.

Перечислим основные преобразования уравнений, приводящие исходное уравнение к уравнению, равносильному ему на некотором множестве чисел.

1. Возведение уравнения $f(x)=g(x)$ в четную степень $2m$ ($m \in N$) приводит к уравнению, равносильному исходному на том множестве M, на котором обе функции f и g неотрицательны.

2. Умножение (или деление) обеих частей уравнения на функцию φ приводит к уравнению, равносильному исходному на том множестве M, на котором функция φ определена и отлична от нуля.

3. Потенцирование логарифмического уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a>0,\ a\neq 1)$$

приводит к уравнению $f(x)=g(x)$, равносильному исходному на том множестве M, на котором положительны обе функции f и g.

4. Приведение подобных членов ($\varphi(x)-\varphi(x)=0$) приводит к уравнению, равносильному исходному на том множестве $D(\varphi)$, на котором определена функция $\varphi(x)$, т. е. на области существования функции $\varphi(x)$.

5. Применение некоторых формул (логарифмических, тригонометрических и др.) приводит к уравнению, равносильному исходному на том множестве M, на котором определены обе части применяемой формулы.

10.1 а) Какие уравнения называют равносильными на множестве M?
б) Что называют равносильным на множестве M переходом от одного уравнения к другому?
в) Какие преобразования приводят к уравнению, равносильному исходному на некотором множестве M?
г) В каком случае говорят, что уравнения равносильны?

10.2 Определите множество M, на котором равносильны уравнения:

а) $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=0$ и $x^2+x-2=0$; б) $\sqrt{x}=1$ и $x^2=1$;

в) $x^3+2x^2-1=0$ и $\sqrt{x}(x^3+2x^2-1)=0$;

г) $x^2+5x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-4$ и $x^2+5x+4=0$;

д) $\lg(x^2-1)=\lg x$ и $x^2-1=x$;

е) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$ и $\log_2 x(x+2)=3$;

ж) $\log_2 x-\log_2(x-3)=2$ и $\log_2 \dfrac{x}{x-3}=2$;

з) $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-2}}=1$ и $\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-2}}=1$.

10.3 Какими условиями задается множество M, на котором равносильны ($a>0$, $a\neq 1$) уравнения:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$ и $f(x)=g(x)\varphi(x)$; б) $\sqrt{f(x)}=\varphi(x)$ и $f(x)=\varphi^2(x)$;

в) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = \varphi(x)$ и $\sqrt{f(x)\,g(x)} = \varphi(x)$;

г) $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = \varphi(x)$ и $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} = \varphi(x)$;

д) $f(x) + \sqrt{g(x)} = \varphi(x) + \sqrt{g(x)}$ и $f(x) = \varphi(x)$;

е) $\sqrt{(f(x))^2} = \varphi(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$;

ж) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и $f(x) = g(x)$;

з) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \varphi(x)$ и $\log_a (f(x)\,g(x)) = \varphi(x)$;

и) $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \varphi(x)$ и $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$;

к) $\dfrac{1}{\log_{f(x)} a} = \varphi(x)$ и $\log_a f(x) = \varphi(x)$;

л) $\log_a (f(x))^2 = \varphi(x)$ и $2\log_a |f(x)| = \varphi(x)$;

м) $2\log_a f(x) = \varphi(x)$ и $\log_a (f(x))^2 = \varphi(x)$;

н) $a^{\log_a f(x)} = \varphi(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$;

о) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \varphi(x)$ и $\cos 2x = \varphi(x)$;

п) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \varphi(x)$ и $\operatorname{tg} 2x = \varphi(x)$?

10.2. Возведение уравнения в четную степень

Пусть $2m$ — четное натуральное число ($m \in N$) и пусть в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, тогда на этом множестве равносильны уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^{2m} = (g(x))^{2m}$.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{1 - 2x} = \sqrt{1 - x}. \qquad (1)$$

Все корни уравнения (1) содержатся во множестве M, состоящем из чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 - x \geqslant 0$ и $1 - 2x \geqslant 0$, т. е. содержатся во множестве $M = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$. В каждой точке множества M обе функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ и $g(x) = \sqrt{1 - x}$ неотрицательны. Поэтому уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$(\sqrt[3]{1 - 2x})^6 = (\sqrt{1 - x})^6. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$x^3 + x^2 - x = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Из них x_1 и x_2 принадлежат множеству M, а x_3 — нет. Следовательно, на множестве M уравнение (2) имеет два корня x_1 и x_2. Поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (1) имеет те же два корня.

Ответ. $0; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Возведение в четную степень можно применять и при решении уравнений, содержащих модуль.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$1 + \sin x = |\cos x|. \qquad (4)$$

Обе части уравнения (4) определены и неотрицательны на множестве всех действительных x. Поэтому после возведения уравнения (4) в квадрат получаем равносильное ему уравнение $(1 + \sin x)^2 = \cos^2 x$, которое можно переписать в виде

$$2 \sin x (1 + \sin x) = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет две серии решений:

$$x_k = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Все эти числа, и только они, являются решениями уравнения (4), равносильного уравнению (5).

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ●

10.4* Докажите утверждение о возведении уравнения в четную степень.

Решите уравнение (10.5—10.13):

10.5 а) $\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{2x-5}$; б) $\sqrt[4]{x-1} = \sqrt[4]{2x+5}$;
в) $\sqrt{2x+11} = \sqrt{4x+1}$; г) $\sqrt{2x-9} = \sqrt{4x+3}$.

10.6 а) $\sqrt[4]{x^2-5} = \sqrt[4]{5x+9}$; б) $\sqrt[4]{2x^2-1} = \sqrt[4]{3x-2}$;
в) $\sqrt{3x^2-13} = \sqrt{5x-1}$; г) $\sqrt{4x^2-11} = \sqrt{13x+31}$.

10.7 а) $\sqrt{x+1} = x-2$; б) $\sqrt{x-1} = x-4$;
в) $\sqrt{x+3} = x+2$; г) $\sqrt{x} = x-1$.

10.8 а) $\sqrt{-2x} = |x+1|$; б) $\sqrt{4x} = |x-2|$;
в) $\sqrt{2-x} = |x-3|$; г) $\sqrt{5-x} = |x-2|$.

10.9* а) $\sqrt{2-2\sin\frac{x}{2}}=1$; б) $\sqrt{2\cos 3x+2}=1$.

10.10* а) $1+\cos x=|\sin x|$; б) $1-\sin x=|\cos x|$;
в) $\sqrt{1-\cos x}=|\sin x|$; г) $\sqrt{1+\sin x}=|\cos x|$.

10.11 а) $\sqrt{x-4}\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$; б) $\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}=\sqrt{5}$;
в) $\sqrt{x-5}\sqrt{x+5}=\sqrt{2}$; г) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}=\sqrt{8}$.

10.12 а) $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x-4}$; б) $\sqrt[3]{x}=\sqrt{2-x}$;
в) $\sqrt[3]{x+3}=\sqrt{x-1}$; г) $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{-x}$.

10.13* а) $\sqrt[3]{3-2x}=\sqrt{2-x}$; б) $\sqrt[3]{5-2x}=\sqrt{3-x}$;
в) $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$; г) $\sqrt[3]{2x+3}=\sqrt{x+2}$.

10.3*. Умножение уравнения на функцию

Пусть в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля. Тогда на множестве M равносильны уравнения

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

и

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть x_0 — любой корень уравнения (1), принадлежащий множеству M, тогда существуют числа $f(x_0)$ и $g(x_0)$ и справедливо числовое равенство

$$f(x_0)=g(x_0). \qquad (3)$$

Так как в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля, то существует число $\varphi(x_0)\neq 0$, поэтому, умножив числовое равенство (3) на число $\varphi(x_0)$, получим, что справедливо числовое равенство

$$f(x_0)\varphi(x_0)=g(x_0)\varphi(x_0). \qquad (4)$$

Равенство (4) означает, что число x_0 является корнем уравнения (2). Следовательно, любой корень уравнения (1), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения (2).

Покажем обратное. Пусть x_1 — любой корень уравнения (2), принадлежащий множеству M, тогда существуют числа $f(x_1)$, $g(x_1)$ и $\varphi(x_1)$ (причем $\varphi(x_1)\neq 0$) и справедливо числовое равенство

$$f(x_1)\varphi(x_1)=g(x_1)\varphi(x_1). \qquad (5)$$

Так как число $\varphi(x_1)$ отлично от нуля, то, разделив числовое равенство (5) на число $\varphi(x_1)$, получим, что справедливо числовое равенство $f(x_1)=g(x_1)$, означающее, что число x_1 является корнем

уравнения (1). Следовательно, любой корень уравнения (2), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения (1).

Из доказанного выше следует, что если хотя бы одно из уравнений (1) и (2) имеет корень, принадлежащий множеству M, то эти уравнения равносильны на множестве M.

Методом от противного можно показать, что если хотя бы одно из уравнений (1) и (2) не имеет корней, принадлежащих множеству M, то эти уравнения равносильны на множестве M.

Итак, утверждение доказано полностью.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\frac{2\sin x}{\sqrt{4-3x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}. \qquad (6)$$

Все корни уравнения (6) содержатся во множестве M всех тех x, для каждого из которых $4-3x-x^2>0$, т. е. содержатся во множестве $M=(-4;\,1)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=\sqrt{4-3x-x^2}$ определена и отлична от нуля, поэтому, умножив уравнение (6) на эту функцию, получим, что на множестве M уравнение (6) равносильно уравнению

$$\sin x = \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет две серии решений: $x_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x_k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из чисел x_n множеству M принадлежит лишь одно число $\frac{\pi}{6}$ (при $n=0$), а из чисел x_k множеству M принадлежит лишь одно число $-\frac{7\pi}{6}$ (при $k=-1$). Следовательно, уравнение (7) на множестве M имеет лишь два корня: $\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{7\pi}{6}$. Поэтому равносильное ему на множестве M уравнение (6) имеет те же корни.

Ответ. $\frac{\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\frac{|x-2|-|x|}{|2x-1|+|x|} = \frac{|2x-1|-|x|}{|x-2|+|x|}. \qquad (8)$$

Так как функция $\varphi(x)=(|2x-1|+|x|)(|x-2|+|x|)$ определена и не равна нулю при каждом $x \in \boldsymbol{R}$, то, умножая уравнение (8) на функцию $\varphi(x)$, получим уравнение

$$(x-2)^2 - x^2 = (2x-1)^2 - x^2, \qquad (9)$$

равносильное уравнению (8). Уравнение (9) имеет два корня: $x_1=-1$ и $x_2=1$. Тогда и равносильное ему уравнение (8) имеет те же корни.

Ответ. $-1;\ 1$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = 1. \qquad (10)$$

Обе части уравнения (10) имеют смысл на множестве всех x. Функция $\varphi(x) = \sin x$ также определена на этом множестве и отлична от нуля для всех $x \neq x_k$, где $x_k = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как

$$16\cos x_k\cos 2x_k\cos 4x_k\cos 8x_k = 16\cdot(-1)^k \neq 1,$$

то числа x_k не являются решениями уравнения (10). Следовательно, все решения уравнения (10) содержатся во множестве M всех чисел $x \neq x_k$. В каждой точке множества функция $\varphi(x) = \sin x$ определена и отлична от нуля, поэтому, умножив уравнение (10) на функцию $\varphi(x)$, получим уравнение

$$16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \sin x, \qquad (11)$$

равносильное уравнению (10) на множестве M.

Применяя 4 раза формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение (11) в виде

$$\sin 16x = \sin x. \qquad (12)$$

Перенося члены уравнения (12) в левую часть и применяя формулу разности синусов, перепишем уравнение (12) в виде

$$2\sin\frac{15}{2}x\cos\frac{17}{2}x = 0. \qquad (13)$$

Это уравнение имеет две серии решений: $x_n = \dfrac{2\pi}{15}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x_m = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2\pi}{17}m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Из этих чисел во множестве M содержатся те x_n, для которых $n \neq 15l$, $l \in \boldsymbol{Z}$, и те x_m, для которых $m \neq 17p + 8$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Поэтому уравнение (13) на множестве M имеет две серии решений: $x_n = \dfrac{2\pi}{15}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 15l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; $x_m = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2\pi}{17}m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m \neq 17p + 8$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, и равносильное ему на множестве M уравнение (10) имеет те же самые решения.

Ответ. $\dfrac{2\pi}{15}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 15l$, $l \in \boldsymbol{Z}$; $\dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2\pi}{17}m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m \neq 17p + 8$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Решите уравнение **(10.14—10.22):**

10.14 а) $\dfrac{3}{(2x+6)(x-1)} + \dfrac{5}{(3x+5)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$;

б) $\dfrac{1}{(3x+5)(x-1)} + \dfrac{7}{(x+7)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$.

10.15 а) $\dfrac{2\sqrt{0{,}5-x}}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{\sqrt{0{,}5-x}}{(x-2)(x+2)}$; б) $\dfrac{4\sqrt{x-10}}{(x-4)(x+3)}=\dfrac{3\sqrt{x-10}}{(x-3)(x-2)}$.

10.16 а) $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)=\dfrac{x^{16}+x^2-5x+3}{x-1}$;

б) $(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)=\dfrac{x^{16}+x^2+5x+3}{x+1}$.

10.17 а) $(x-1)(x^2+1)(x^4+1)=x^7$; б) $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=x^7$.

10.18 а) $\dfrac{|x-2|-|x|}{|2x-1|+|x|}=\dfrac{|2x-1|-|x|}{|x-2|+|x|}$; б) $\dfrac{|2x-3|-|x|}{|3x-2|+|x|}=\dfrac{|3x-2|-|x|}{|2x-3|+|x|}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{x}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{x}}$.

10.19 а) $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$; б) $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

в) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}$; г) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{\pi^2-x^2}}$.

10.20 а) $27\cdot 7^{x+3}=147^x$; б) $6^x\cdot 5^{x-2}=9\cdot 2^x$;

в) $5^{x+1}-4\cdot 6^x=6^{x-1}-5^x$; г) $5^{2x-1}+2^{2x}=25^x-4^{x+1}$;

д) $\dfrac{2^{x+1}+2\cdot 3^x}{2^x}=\dfrac{3\cdot 2^x+3^{x+1}}{3^x}$; е) $\dfrac{2^{x+2}+4\cdot 6^x}{4^x}=\dfrac{2^x+6^x}{2^x}$.

10.21 а) $3\cos x+4\sin x=0$; б) $2\sin x-\cos x=0$;

в) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$;

г) $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

10.22 а) $4\cos x\cos 2x=1$; б) $4\cos x\cos 2x=-1$;

в) $8\cos x\cos 2x\cos 4x=1$; г) $8\cos x\cos 2x\cos 4x=-1$.

10.4*. Другие преобразования уравнений

1. Потенцирование и логарифмирование уравнений.

Пусть фиксированное число a таково, что $a>0$ и $a\neq 1$, и пусть в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны. Тогда на множестве M равносильны уравнения

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \qquad (1)$$

и

$$f(x)=g(x). \qquad (2)$$

Переход от уравнения (1) к уравнению (2) называют **потенцированием логарифмического уравнения** (1), а переход от уравнения (2) к уравнению (1) — **логарифмированием уравнения** (2).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\lg(1 - x^2) = \lg 2x. \qquad (3)$$

Все решения уравнения (3) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых $1 - x^2 > 0$ и $2x > 0$, т. е. во множестве $M = (0; 1)$. В каждой точке множества M положительны обе функции $f(x) = (1 - x^2)$ и $g(x) = 2x$. Поэтому уравнение (3) равносильно на множестве M уравнению

$$1 - x^2 = 2x, \qquad (4)$$

имеющему два корня: $x_1 = -\sqrt{2} - 1$ и $x_2 = \sqrt{2} - 1$.

Число x_2 принадлежит множеству M, а число x_1 нет. Поэтому уравнение (4) на множестве M имеет только один корень x_2. Следовательно, и равносильное ему на множестве M уравнение (3) имеет тот же корень.

Ответ. $\sqrt{2} - 1$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{\sin x}. \qquad (5)$$

Все корни уравнения (5) содержатся среди тех x, для каждого из которых справедливо неравенство $x - 1 > 0$, т. е. содержатся во множестве $M = (1; +\infty)$. В каждой точке этого множества определены и положительны обе функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ и $g(x) = (x-1)^{\sin x}$. Поэтому, логарифмируя уравнение (5), получим, что оно равносильно на множестве M уравнению

$$\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = \lg(x-1)^{\sin x}. \qquad (6)$$

Применяя свойства логарифмов, получим, что уравнение (6) равносильно на множестве M уравнению $\lg(x-1)\left(\dfrac{1}{2} + \sin x\right) = 0$, все решения которого, принадлежащие множеству M: $x_0 = 2$; $x_k = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in N$; $x_n = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in N$. Следовательно, и равносильное на множестве M уравнение (5) имеет те же решения.

Ответ. 2; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in N$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in N$.

2. Приведение подобных членов.

Пусть в каждой точке множества M определена функция $\varphi(x)$. Тогда на множестве M равносильны уравнения

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \text{ и } f(x) = 0.$$

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$x^2 - 2x + \log_2 x = 3 + \log_2 x. \qquad (7)$$

Очевидно, что если уравнение (7) имеет корни, то эти корни удовлетворяют неравенству $x > 0$, т. е. принадлежат множеству $M = (0; +\infty)$.

Так как в каждой точке множества M определена функция $\varphi(x) = \log_2 x$, то уравнение (7) равносильно на множестве M уравнению

$$x^2 - 2x - 3 = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Число x_2 принадлежит множеству M, а число x_1 нет. Следовательно, уравнение (8) на рассматриваемом множестве имеет единственный корень x_2. Так как уравнения (7) и (8) равносильны на множестве M, то уравнение (7) имеет только тот же корень.

Ответ. 3.

3. Применение формул.

Пусть в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т. п.). Тогда, применив эту формулу при решении уравнения, получим уравнение, равносильное на множестве M исходному уравнению.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$3^{\log_3 (2x - 5)} = x^2 - 4x + 1. \qquad (9)$$

Все решения уравнения (9) принадлежат множеству тех x, для каждого из которых $2x - 5 > 0$, т. е. принадлежат множеству $M = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $3^{\log_3 (2x - 5)} = 2x - 5$. Поэтому на множестве M уравнение (9) равносильно уравнению

$$2x - 5 = x^2 - 4x + 1, \qquad (10)$$

имеющему два корня: $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{3}$. Число x_2 принадлежит множеству M, а число x_1 нет. Поэтому уравнение (10) на рассматриваемом множестве имеет единственный корень x_2. Следовательно, и равносильное ему на множестве M уравнение (9) имеет только этот корень.

Ответ. $3 + \sqrt{3}$.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$2 \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (11)$$

Все решения уравнения (11) содержатся во множестве M всех $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как в каждой точке множества M определены обе

части формул $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то уравнение (11) равносильно на множестве M уравнению

$$\frac{2}{\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \qquad (12)$$

Так как уравнение $\frac{2}{t} = 1 + t^2$ имеет только один действительный корень $t = 1$, то уравнение (12) равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 1$.

Множество решений последнего уравнения составляет серию $x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как все эти числа принадлежат множеству M, то все они и будут решениями уравнения (12) на множестве M. Поэтому уравнение (11), равносильное уравнению (12) на множестве M, имеет те же решения.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 6. Решим уравнение

$$\log_2 x = 1 + 2\log_x 2. \qquad (13)$$

Все корни уравнения (13) принадлежат множеству $M = (0; 1) \cup (1; +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, поэтому уравнение (13) равносильно на множестве M уравнению

$$\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} - 1 = 0. \qquad (14)$$

Так как уравнение $t - \frac{2}{t} - 1 = 0$ имеет только два корня: -1 и 2, то только корни двух уравнений $\log_2 x = -1$ и $\log_2 x = 2$ являются корнями уравнения (14). Следовательно, уравнение (14) имеет два корня: $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 4$. Числа x_1 и x_2 принадлежат множеству M. Поэтому уравнение (14) на множестве M имеет два корня x_1 и x_2, но тогда и равносильное ему на множестве M уравнение (13) имеет те же корни.

Ответ. $\frac{1}{2}$; 4.

10.23* Докажите справедливость утверждений о потенцировании и логарифмировании уравнений, о приведении подобных членов и о применении формул.

Решите уравнение **(10.24—10.30)**:

10.24 а) $\lg(x^2 - 4) = \lg(x - 1)$; б) $\log_2(x^2 - 9) = \log_2(2 - x) + 1$;
в) $\lg 3x^2 = \lg(2x + 1)$; г) $\log_2(16 - x^2) = \log_2(1 + x) + 1$.

10.25 а) $\log_2 x = \log_4 (x+2)$; б) $\log_9 (x+8) = \log_3 (x+2)$;
в) $\log_{25} (9x+7) = \log_5 (3+x)$; г) $\log_4 (x+9) = \log_2 (x-3)$;
д) $\log_2 (x+3) - \log_{\frac{1}{2}} (x+3) = 4$; е) $\log_3 (x+2) - \log_{\frac{1}{3}} (x+2) = 2$.

10.26 а) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = (x-2)^{\cos x}$; б) $(x^2+2)^{\sin x} = (x^2+2)^{\cos x}$;
в) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$; г) $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \dfrac{1}{x} = 0$.

10.27 а) $x^2 + 2x + \log_2 (x+1) = 15 + \log_2 (x+1)$;
б) $x^2 - 6x - \log_3 (1-x) = 7 - \log_3 (1-x)$;
в) $x^2 + \log_4 x = 7x + \log_4 x$;
г) $x^2 - \log_5 (-x) = -6x - \log_5 (-x)$.

10.28 а) $4^{\log_4 (2x+1)} = x^2 + 3x - 5$; б) $5^{\log_5 (x-2)} = x^2 + 4x - 30$;
в) $6^{\log_6 (1-x)} = x^2 + 3x - 20$; г) $7^{\log_7 (2-x)} = x^2 - 3x - 13$.

10.29 а) $\log_3 x = 4 - 3\log_x 3$; б) $\log_4 x + 2 = 3\log_x 4$;
в) $\log_3 x - 2 = 3\log_x 3$; г) $\log_2 x + 6\log_x 2 = 5$.

10.30 а) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sin x$; б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos x - 1$;
в) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos x$; г) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sin x$.

10.5*. Применение нескольких преобразований

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$4\log_4 (x+2) = \log_2 (2x+1) + \log_2 x. \qquad (1)$$

Все корни уравнения (1) принадлежат множеству $M = (0; +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формул

$$4\log_4 (x+2) = \log_2 (x+2)^2 \text{ и } \log_2 (2x+1) + \log_2 x = \log_2 (2x^2+x).$$

Поэтому уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$\log_2 (x+2)^2 = \log_2 (2x^2+x). \qquad (2)$$

В каждой точке множества M положительны обе функции $f(x) = (x+2)^2$ и $g(x) = 2x^2 + x$. Поэтому уравнение (2) равносильно на множестве M уравнению

$$(x+2)^2 = 2x^2 + x, \qquad (3)$$

имеющему два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = -1$. Число x_1 принадлежит множеству M, а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (3) на множестве M имеет единственный корень x_1, поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (1) имеет тот же корень.

Ответ. 4.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$4\sqrt{x} = 5 + \sqrt{45 - 4x}. \qquad (4)$$

Все корни уравнения (4) содержатся во множестве $M = [0;\ 11{,}25]$.

Так как в каждой точке множества M обе части уравнения (4) неотрицательны, то возведя уравнение (4) в квадрат, получим уравнение

$$16x = 25 + 10\sqrt{45 - 4x} + 45 - 4x, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4) на множестве M. Перепишем уравнение (5) в виде

$$2x - 7 = \sqrt{45 - 4x}. \qquad (6)$$

На множестве M правая часть уравнения (6) неотрицательна, поэтому корни уравнения (6), принадлежащие множеству M, надо искать среди тех x, для которых справедливо неравенство $2x - 7 \geqslant 0$. Поэтому корни уравнения (6), а значит, и уравнения (4) принадлежат множеству $M_1 = [3{,}5;\ 11{,}25]$, причем $M_1 \subset M$. Следовательно, уравнение (6) равносильно на множестве M_1 уравнению (4).

Возведя уравнение (6) в квадрат, получаем уравнение

$$4x^2 - 28x + 49 = 45 - x, \qquad (7)$$

равносильное уравнению (6) на множестве M_1. Уравнение (7) имеет два корня: $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ и $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Так как $x_1 \in M_1$, а $x_2 \notin M_1$, то число x_1 является корнем уравнения (6), а число x_2 — нет. Следовательно, уравнение (6) имеет на множестве M_1 единственный корень x_1, поэтому и равносильное ему на множестве M_1 уравнение (4) имеет единственный корень x_1.

Ответ. $3 + 2\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{3}{\sqrt{x(x-1)}}. \qquad (8)$$

Все корни уравнения (8) принадлежат множеству тех x, для каждого из которых $x(x-1) > 0$, т. е. принадлежат множеству $M = (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)}$ определена и отлична от нуля. Поэтому, умножив уравнение (8) на эту функцию и применив формулы

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}}\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{x-1}{x}}\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{(x-1)^2},$$

обе части каждой из которых определены на множестве M, получим уравнение

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 3, \qquad (9)$$

равносильное уравнению (8) на множестве M.

Применяя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, получим, что на промежутке $(-\infty; 0)$ уравнение (9) равносильно уравнению $-x - (x - 1) = 3$, имеющему единственный корень $x_1 = -1$, принадлежащий этому промежутку.

Применяя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, получим, что на промежутке $(1; +\infty)$ уравнение (9) равносильно уравнению $x + (x - 1) = 3$, имеющему единственный корень $x_2 = 2$, принадлежащий этому промежутку.

Следовательно, уравнение (9) имеет на множестве M два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Так как уравнения (8) и (9) равносильны на множестве M, то уравнение (8) имеет те же два корня.

Ответ. -1; 2.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$\log_{x+3}(8 - x) = 2\log_{x+3}(x + 4). \qquad (10)$$

Все корни уравнения (10) содержатся во множестве всех тех x, для каждого из которых $x + 3 > 0$, $x + 3 \neq 1$, $8 - x > 0$, $x + 4 > 0$, т. е. содержатся во множестве $M = (-3; -2) \cup (-2; 8)$.

В каждой точке множества M определены обе части формул

$$\log_{x+3}(8 - x) = \frac{\lg(8 - x)}{\lg(x + 3)} \text{ и } 2\log_{x+3}(x + 4) = \frac{\lg(x + 4)^2}{\lg(x + 3)}.$$

Поэтому уравнение (10) равносильно на множестве M уравнению

$$\frac{\lg(8 - x)}{\lg(x + 3)} = \frac{\lg(x + 4)^2}{\lg(x + 3)}. \qquad (11)$$

В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = \lg(x + 3)$ определена и отлична от нуля. Поэтому уравнение (11) равносильно на множестве M уравнению

$$\lg(8 - x) = \lg(x + 4)^2. \qquad (12)$$

В каждой точке множества M функции $f(x) = 8 - x$ и $g(x) = (x + 4)^2$ положительны. Поэтому уравнение (12) равносильно на множестве M уравнению

$$8 - x = (x + 4)^2, \qquad (13)$$

имеющему два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = -8$. Так как $x_1 \in M$, а $x_2 \notin M$, то уравнение (13) имеет на множестве M единственный корень x_1. Следовательно, и равносильное ему на этом множестве уравнение (10) имеет тот же корень.

Ответ. -1.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\sqrt{x - 1} + x^{2 + \log_2 x} = \sqrt{x - 1} + 8. \qquad (14)$$

Все корни уравнения (14) принадлежат множеству $M = [1; +\infty)$. В каждой точке множества M определена функция $\varphi(x) = \sqrt{x - 1}$, определены обе части формулы $x = 2^{\log_2 x}$. Поэтому уравнение (14) равносильно на множестве M уравнению

$$2^{\log_2^2 x + 2\log_2 x} = 2^3. \qquad (15)$$

Логарифмируя показательное уравнение (15), получим, что уравнение (15) равносильно уравнению $\log_2^2 x + 2\log_2 x = 3$, имеющему два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{8}$. Так как число x_1 принадлежит множеству M, а число x_2 нет, то уравнение (15) на множестве M имеет единственный корень x_1. Поэтому и равносильное ему на множестве M уравнение (14) имеет тот же корень.

Ответ. 2.

Решите уравнение **(10.31—10.47)**:

10.31 а) $\sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x} + 7x + 27\sqrt{x} + 24} = \sqrt{x} + 3$;

б) $\sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x} + 27\sqrt{x} - 37} = \sqrt{x} - 3$.

10.32 а) $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x-1} + 1$; б) $2\sqrt{3x+7} = 3\sqrt{2x+2} + 2$;

в) $\sqrt{6x-3} - 2\sqrt{x} = 1$; г) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x} = 1$.

10.33 а) $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \frac{7}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$;

б) $\sqrt{\frac{x-5}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-5}} = \frac{10}{\sqrt{(x+1)(x-5)}}$.

10.34 а) $\log_2(x+2) + \log_2(3x+2) = \log_2(5x+22)$;

б) $\log_3(x-5) + \log_3(x+1) = \log_3(3x+3)$;

в) $\log_5(x-6) + \log_5(2x+11) = \log_5(3x+4)$;

г) $\log_4(2x+6) + \log_4(3x-14) = \log_4(3x+1)$.

10.35 а) $\log_5(x-5)^2 = 2\log_5\sqrt{x}$; б) $\log_3(x-3)^2 = 2\log_3\sqrt{x}$;

в) $\lg(x-2)^2 = 2\lg\sqrt{3-x}$; г) $\lg(x-1)^2 = 2\lg\sqrt{2-x}$.

10.36 а) $\lg(8x+11) + \sqrt{x} = \lg(x^2+2) + \sqrt{x}$;

б) $\lg(x+8) + \sqrt{-x} = \lg(x^2+2) + \sqrt{-x}$.

10.37 а) $\lg(x-1) + \sqrt{9-x^2} = \lg(x-1) + \sqrt{x+5}$;

б) $\lg(1-x) + \sqrt{25-x^2} = \lg(1-x) + \sqrt{x+16}$.

10.38 а) $\log_2 x = 2\log_2(x-3) + 2$; б) $\log_5 x = 2\log_5(6-x) + 1$;

в) $\log_3(x-2) - 3\log_{x-2} 9 = 1$; г) $\log_2(x-3) + 3\log_{x-3} 4 = 5$.

10.39 а) $\log_3 x - \frac{2}{1+\log_x 27} = \frac{6}{3+\log_3 x}$;

б) $\log_2 x - \frac{8}{2+\log_2 x} = \frac{4}{1+\log_x 4}$.

10.40 а) $\log_2(8x^2 - x) \cdot \log_{4x}(8x - 1) = 2$;
б) $\log_5(x - 2) \cdot \log_{\sqrt{x+10}} 5 = 1$; в) $\log_3(x - 1) \cdot \log_{\sqrt{x+5}} 3 = 1$.

10.41 а) $\log_3(5x^2 - x) \cdot \log_{3x}(5x - 1) = 1$;
б) $\log_4(20x^2 - x) \cdot \log_{16x}(20x - 1) = 2$.

10.42 а) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$; б) $x^{2 - \lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0$.

10.43* а) $(x^2 + 1)^{\sqrt{8x - x^2 - 15}} = (2x + 9)^{\sqrt{8x - x^2 - 15}}$;
б) $(x^2 - 8)^{\sqrt{24x - 4x^2 - 35}} = (7x - 20)^{\sqrt{24x - 4x^2 - 35}}$.

10.44 а) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{\log_{\frac{1}{25}}(8 + 2x - x^2)}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1 + 7x - 2x^2)}$.

10.45 а) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x + 1}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = (4 - x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} = (2 - x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x + 1}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} = (2 - x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{\cos x + 1}}$.

10.46 а) $\log_{|x|}(1 + x) = \log_{|x|}(x^2 - 5)$; б) $\log_{|x|}(9 + x) = \log_{|x|}(x^2 + 7)$.

10.47 При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 - a^2}{x - 4} = 0$ имеет единственный корень?

10.6*. Уравнения с дополнительными условиями

Довольно часто требуется решить уравнение при некоторых условиях. Дополнительные условия обычно означают, что надо решить уравнение на том или ином множестве. Иногда эти условия облегчают решение уравнения.

ПРИМЕР 1. Найдем все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1, \qquad (1)$$

удовлетворяющие неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Прежде всего заметим, что левая часть уравнения (1) неотрицательна при любом действительном x. Это означает, что корни урав-

нения (1) удовлетворяют условиям $2x - 1 \geqslant 0$ и $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. принадлежат множеству $M = \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Так как в каждой точке этого множества квадратный трехчлен $x^2 + x - 1$ принимает только отрицательные значения, то на множестве M уравнение (1) равносильно уравнению $-(x^2 + x - 1) = 2x - 1$, имеющему два корня: $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ и $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$. Из этих чисел только x_2 принадлежит множеству M, следовательно, только x_2 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

Часто дополнительное условие не облегчает решение уравнения. В таких случаях обычно сначала решают уравнение, а потом отбирают из найденных решений те, которые удовлетворяют условию.

ПРИМЕР 2. Найдем все корни уравнения

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3, \qquad (2)$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$.

Применив формулу квадрата косинуса угла, перепишем уравнение (2) в виде

$$(2^{\cos 2x})^2 + 2 \cdot 2^{\cos 2x} - 3 = 0. \qquad (3)$$

Так как уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$ имеет два корня: $y_1 = 1$ и $y_2 = -3$, то множество всех решений уравнения (3), а значит, и уравнения (2) есть объединение множеств решений двух уравнений

$$2^{\cos 2x} = 1 \quad \text{и} \quad 2^{\cos 2x} = -3. \qquad (4)$$

Первое из уравнений (4) имеет серию решений $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а второе не имеет решений, так как $2^{\cos 2x} > 0$ для любого x. Таким образом, уравнение (2) имеет единственную серию решений x_k. Теперь из этих чисел надо отобрать те, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$.

Так как двойному неравенству $-\frac{7\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leqslant -\frac{2\pi}{3}$ удовлетворяет единственное целое число $k = -2$, то условию задачи удовлетворяет лишь одно число $x_{-2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot (-2) = -\frac{3\pi}{4}$.

Ответ. $-\frac{3\pi}{4}$.

Найдите все решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку (10.48—10.53):

10.48 а) $\sin 2x + 2\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$, $(0; \pi)$;

б) $\sin 2x - 2\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

10.49 а) $\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x = 0$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $5\sin^2 x - 2\sin 2x - \cos^2 x = 0$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

10.50 а) $|x^2 - 3x + 2| = 2x - 2$, $[3; 5]$; б) $|x^2 - 2x - 8| = x + 2$, $[0; 4]$.

10.51 а) $x^4 + x^3 + x^2 - 3x = 0$, $[-2; 0]$; б) $x^4 + x^3 + x^2 - 14x = 0$, $[3; 7]$.

10.52 а) $(x - \log_3 75)(x - \log_2 22) = 0$, $[3; 4]$;
б) $(x - \log_2 17)(x - \log_2 71) = 0$, $[4; 5]$.

10.53 а) $3\operatorname{tg}^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$, $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$; б) $3\cos 2x - 5\cos x = 1$, $[0; 2\pi]$.

§ 11. Равносильность неравенств на множествах

11.1. Основные понятия

Пусть даны два неравенства: $f(x) > g(x)$ и $p(x) > \varphi(x)$ и пусть дано некоторое множество чисел M. Если любое решение первого неравенства, принадлежащее множеству M, является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства, принадлежащее множеству M, является решением первого неравенства, то такие два неравенства называют **равносильными на множестве** M. При этом, в частности, подразумевается, что если каждое из этих неравенств не имеет решений на множестве M, то такие два неравенства равносильны на множестве M.

Замену одного неравенства другим неравенством, равносильным ему на множестве M, называют **равносильным переходом на множестве** M от одного неравенства к другому, или **равносильным на множестве** M **преобразованием** неравенства. Например, неравенства $\sqrt{x} > 1$ и $x^2 > 1$ не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, но они равносильны на множестве всех положительных чисел, а неравенства $x > 1$ и $x^3 > 1$ являются равносильными на множестве всех действительных чисел.

Если два неравенства равносильны на множестве всех действительных чисел, то в таких случаях говорят, что неравенства равносильны, опуская слова «на множестве всех действительных чисел».

Равносильные преобразования неравенств уже были рассмотрены в § 7.

Перечислим основные преобразования неравенств, приводящие исходное неравенство к неравенству, равносильному ему на некотором множестве чисел.

1. Возведение неравенства в четную степень, т. е. замена неравенства $f(x) > g(x)$ неравенством $(f(x))^{2m} > (g(x))^{2m}$, $m \in N$, приводит к неравенству, равносильному исходному на том множестве M, на котором обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны.

2. Умножение обеих частей неравенства на функцию $\varphi(x)$, т. е. замена неравенства $f(x) > g(x)$ неравенством $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$, приводит к неравенству, равносильному исходному на том множестве M, на котором функция $\varphi(x)$ положительна.

3. Потенцирование логарифмического неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

т. е. замена этого неравенства при $a > 1$ неравенством $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ неравенством $f(x) < g(x)$, приводит к неравенству, равносильному исходному на том множестве M, на котором обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны.

4. Приведение подобных членов, т. е. замена разности $f(x) - f(x)$ нулем, приводит к неравенству, равносильному исходному на том множестве M, на котором определена функция $f(x)$.

5. Применение некоторых формул (логарифмических, тригонометрических и др.) приводит к неравенству, равносильному исходному на том множестве M, на котором определены обе части применяемой формулы.

11.1° Какие неравенства называют равносильными на множестве M?

11.2° а) Что называют равносильным переходом на множестве M от одного неравенства к другому?

б) В каком случае говорят, что неравенства равносильны?

11.3° Приведите пример неравенств, равносильных:

а) на множестве положительных чисел;

б) на множестве отрицательных чисел;

в) на множестве всех действительных чисел.

11.4° Перечислите основные преобразования неравенств, приводящие данное неравенство к неравенству, равносильному ему на некотором множестве чисел.

11.5 Объясните, в результате какого преобразования из первого неравенства получено второе:

а) $\sin x > \cos x$, $\sin^2 x > \cos^2 x$; б) $x^4 > 5$, $x > \sqrt[4]{5}$;

в) $\log_3 \operatorname{tg} x > \log_3 \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$;

г) $\log_{0,2}(x^2 + 3) > \log_{0,2} 4x$, $x^2 + 3 < 4x$;

д) $\sin x + \sqrt{x} > \sin 2x + \sqrt{x}$, $\sin x > \sin 2x$;

е) $\dfrac{x^2 - 5x}{\lg x} > \dfrac{-6}{\lg x}$, $x^2 - 5x > -6$;

ж) $\dfrac{x^2 - 5x}{\lg x} > \dfrac{-6}{\lg x}$, $x^2 - 5x < -6$;

з) $\log_2 x + \log_2 (x + 1) > 1$, $\log_2 (x^2 + x) > 1$;

и) $\sqrt{x}\sqrt{x+1} < \sqrt{2}$, $\sqrt{x^2 + x} < \sqrt{2}$.

В каждом случае выясните, на каком множестве равносильны первое и второе неравенства.

11.2. Возведение неравенства в четную степень

Пусть $2m$ – четное натуральное число ($m \in N$) и пусть в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

и

$$(f(x))^{2m} > (g(x))^{2m}. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть число x_1 принадлежит множеству M и является решением неравенства (1), т. е. пусть существуют неотрицательные числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$, для которых справедливо числовое неравенство

$$f(x_1) > g(x_1).$$

Но если одно неотрицательное число больше другого, то n-я степень первого числа больше n-й степени другого, т. е. справедливо числовое неравенство $(f(x_1))^{2m} > (g(x_1))^{2m}$. Это означает, что число x_1 является решением неравенства (2).

Такое рассуждение можно провести для любого решения $x_1 \in M$ неравенства (1), следовательно, любое решение неравенства (1), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (2).

Покажем теперь обратное. Пусть теперь число x_2 принадлежит множеству M и является решением неравенства (2), т. е. пусть существуют неотрицательные числа $f(x_2)$ и $g(x_2)$, для которых справедливо числовое неравенство $(f(x_2))^{2m} > (g(x_2))^{2m}$.

Но если одно неотрицательное число больше другого, то корень четной степени $2m$ из первого числа больше корня той же степени из другого, т. е. справедливо числовое неравенство $f(x_2) > g(x_2)$. Это означает, что число x_2 является решением неравенства (1).

Такое рассуждение можно провести для любого решения $x_2 \in M$ неравенства (2), следовательно, любое решение неравенства (2), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (1).

Таким образом, если хотя бы одно из неравенств (1) или (2) имеет решения, принадлежащие множеству M, то они равносильны на множестве M.

Если же число x_1 принадлежит множеству M и не является решением неравенства (1), и числа $f(x_1)$ и $g(x_1)$ неотрицательны, то это означает, что выполняется либо равенство $f(x_1)=g(x_1)$, либо неравенство $f(x_1)<g(x_1)$. Но тогда по доказанному ранее выполняется либо равенство $(f(x_1))^{2m}=(g(x_1))^{2m}$, либо неравенство $(f(x_1))^{2m}<(g(x_1))^{2m}$, т. е. x_1 не удовлетворяет неравенству (2). Это означает, что если неравенство (1) не имеет решений на множестве M, то и неравенство (2) не имеет решений на этом множестве.

Если же неравенство (2) не имеет решений на множестве M, то аналогично показывается, что и неравенство (1) не имеет решений на этом множестве.

Таким образом, если одно из неравенств (1) или (2) не имеет решений на множестве M, то и второе неравенство не имеет решений на множестве M.

Итак, неравенства (1) и (2) равносильны на множестве M и утверждение полностью доказано. ●

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\sqrt{x} < \sqrt[4]{x+6}. \qquad (1)$$

Все решения неравенства (1) содержатся во множестве $M=[0;+\infty)$. В каждой точке множества M обе функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt[4]{x+6}$ неотрицательны. Поэтому неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$(\sqrt{x})^4 < (\sqrt[4]{x+6})^4,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2 - x - 6 < 0. \qquad (2)$$

Все решения неравенства (2) составляют промежуток $(-2;\ 3)$, из них множеству M принадлежат все x из промежутка $[0;\ 3)$. Следовательно, все решения неравенства (2) на множестве M составляют промежуток $[0;\ 3)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $[0;\ 3)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\sqrt{x+1} > \sqrt[3]{3x+1}. \qquad (3)$$

Все решения неравенства (3) содержатся во множестве $M=[-1;+\infty)$.

1) Очевидно, что все $x\in M$, для которых $3x+1<0$, т. е. все $x\in\left[-1;\ -\frac{1}{3}\right)$ являются решениями неравенства (3).

2) В каждой точке множества $M_1 = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ обе функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ неотрицательны. Поэтому неравенство (3) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$(\sqrt{x+1})^6 > (\sqrt[3]{3x+1})^6,$$

которое можно переписать в виде

$$x(x^2 - 6x - 3) > 0. \qquad (4)$$

Все решения неравенства (4) составляют два промежутка: $(3 - \sqrt{12}; 0)$ и $(3 + \sqrt{12}; +\infty)$. Из них множеству M_1 принадлежат все x из двух промежутков: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ и $(3 + \sqrt{12}; +\infty)$. Следовательно, все решения неравенства (4) на множестве M_1 составляют два промежутка: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ и $(3 + \sqrt{12}; +\infty)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M_1 неравенство (3) имеет на этом множестве те же решения.

Объединяя решения, найденные в пп. 1) и 2), получим, что множество решений неравенства (3) составляет два промежутка: $[-1; 0)$ и $(3 + \sqrt{12}; +\infty)$.

Ответ. $[-1; 0) \cup (3 + \sqrt{12}; +\infty)$.

Возведение в четную степень можно применять при решении неравенств с модулями.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$|x - 4| > |x + 6|. \qquad (5)$$

Обе части неравенства (5) неотрицательны для любых x, поэтому, возведя неравенство (5) в квадрат, получим неравенство

$$(x - 4)^2 > (x + 6)^2, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5). Множество всех решений неравенства (6), а значит, и равносильного ему неравенства (5) есть множество $(-\infty; -1)$.

Ответ. $(-\infty; -1)$. ●

Решите неравенство (11.6—11.16):

11.6 а) $\sqrt{3x-2} < x$; б) $\sqrt{4x-3} < x$; в) $\sqrt{5x-4} < x$; г) $\sqrt{6x-5} < x$.

11.7 а) $\sqrt{2x-1} < x$; б) $2\sqrt{x-1} < x$; в) $\sqrt{6x-9} < x$; г) $2\sqrt{2x-4} < x$.

11.8 а) $\sqrt{x+1} < x-1$; б) $\sqrt{x+4} < x+2$;
в) $\sqrt{x+1} < x+1$; г) $\sqrt{x+4} < x-2$.

11.9 а) $\sqrt{x+1} > x-1$; б) $\sqrt{x+4} > x-2$;
в) $\sqrt{2x+1} > x-1$; г) $\sqrt{3x+4} > x-2$.

11.10 а) $\sqrt{3-x} > x-1$; б) $\sqrt{6-x} > 3x-4$;
в) $\sqrt{5-x} > x-3$; г) $\sqrt{4-x} > 2x-5$.

11.11 а) $\sqrt{6x+7} > x+2$; б) $\sqrt{5x+6} > x+2$;
в) $\sqrt{6x-2} > x+1$; г) $\sqrt{5x-1} > x+1$.

11.12 а) $\sqrt{-x^2-5x} > \sqrt{-x-3}$; б) $\sqrt{x^2-6x} > \sqrt{-x-1}$;
в) $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{3x-1}$; г) $\sqrt{x^2-7x} > \sqrt{-x-2}$.

11.13 а) $|3x+2| > |2x+3|$; б) $|3x-4| < |x-4|$;
в) $\left|\frac{3}{4}x-2\right| > \left|2x-\frac{3}{4}\right|$; г) $|5x-3| > |x-3|$.

11.14 а) $\sqrt{6x-3} < |x+1|$; б) $\sqrt{6+3x} > |2x+1|$;
в) $\sqrt{5x-1} > |3x-1|$; г) $\sqrt{7x+2} > |x+2|$.

11.15 а) $\sqrt{x} < \sqrt[4]{x+3}$; б) $\sqrt{x} > \sqrt[4]{x+4}$;
в) $\sqrt{x+1} > \sqrt[3]{2x+1}$; г) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{3x-2}$.

11.16 а) $1+\sin x > |\cos x|$; б) $1-\cos x > |\sin x|$;
в) $1-\sin x < |\cos x|$; г) $1+\cos x < |\sin x|$.

11.3*. Умножение неравенства на функцию

Пусть в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и положительна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} < \frac{2x+3}{\sqrt{4-x^2}}. \qquad (1)$$

Все решения неравенства (1) принадлежат множеству тех x, для каждого из которых $4-x^2>0$, т. е. принадлежат множеству $M=(-2;\,2)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x)=\sqrt{4-x^2}$ определена и положительна, поэтому, умножив неравенство (1) на

эту функцию, получим, что на множестве M неравенство (1) равносильно неравенству

$$x^2 < 2x + 3. \qquad (2)$$

Все решения неравенства (2) составляют интервал $(-1; 3)$. Из них множеству M принадлежат лишь x из интервала $(-1; 2)$. Следовательно, все решения неравенства (2) на множестве M составляют интервал $(-1; 2)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $(-1; 2)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+4} - 2|x|}{\sqrt{2x} + |x|} > \frac{\sqrt{2x} - |x|}{\sqrt{x^2+4} + 2|x|}. \qquad (3)$$

Все решения неравенства (3) содержатся во множестве $M = (0; +\infty)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = (\sqrt{2x} + |x|)(\sqrt{x^2+4} + 2|x|)$ определена и положительна. Поэтому, умножив неравенство (3) на эту функцию, получим, что на множестве M неравенство (3) равносильно неравенству

$$x^2 + 4 - 4x^2 > 2x - x^2. \qquad (4)$$

Множество решений неравенства (4) составляет интервал $(-2; 1)$, из них множеству M принадлежит лишь x из интервала $(0; 1)$. Следовательно, все решения неравенства (4) на множестве M составляют интервал $(0; 1)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (3) имеет те же решения.

Ответ. $(0; 1)$.

11.17 Докажите утверждение об умножении неравенства на функцию.

Решите неравенство **(11.18—11.22)**:

11.18 а) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-16}} > \dfrac{5x-5}{\sqrt{x^2-16}}$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x-x^2}} > \dfrac{7x-3}{\sqrt{5x-x^2}}$;

в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-x^2-2}} < \dfrac{3-6x}{\sqrt{3x-x^2-2}}$; г) $\dfrac{x^2}{\sqrt{5-4x-x^2}} < \dfrac{11-4x}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

11.19 а) $\dfrac{8-3|x|}{4+|x|} > 1$; б) $\dfrac{9-2|x|}{5+|x|} < 1$;

в) $\dfrac{15+4|x|}{5+6|x|} > 1$; г) $\dfrac{5+3|x|}{3+5|x|} < 1$.

11.20 а) $\dfrac{x^2}{1-\cos x} < \dfrac{x+2}{1-\cos x}$; б) $\dfrac{x^2}{\cos x - 1} > \dfrac{-x+2}{\cos x - 1}$;

в) $\dfrac{x^2}{1-\sin x} < \dfrac{2x+3}{1-\sin x}$; г) $\dfrac{x^2}{\sin x - 1} > \dfrac{x+2}{\sin x - 1}$.

11.21 а) $\dfrac{2|x-3|}{|x-5|} < \dfrac{|x-5|}{|x-3|}$; б) $\dfrac{2|x+1|}{|x+3|+|x-1|} < \dfrac{|x+3|-|x-1|}{|x+1|}$;

в) $\dfrac{2|x+2|}{|x+3|} < \dfrac{|x+3|}{|x+2|}$; г) $\dfrac{2|x+5|}{|x+3|+|x+7|} < \dfrac{|x+3|-|x+7|}{|x+5|}$.

11.22 а) $\dfrac{2}{\sqrt{\sin x}} > \dfrac{x^2-x}{\sqrt{\sin x}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{\cos x}} > \dfrac{x^2+x}{\sqrt{\cos x}}$.

11.4*. Другие преобразования неравенств

1. Потенцирование логарифмических неравенств.

Пусть в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, тогда на множестве M равносильны неравенства:
1) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;
2) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\lg 4x < \lg(1 - x^2). \qquad (1)$$

Все решения уравнения (1) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых $4x > 0$ и $1 - x^2 > 0$, т. е. во множестве $M = (0; 1)$. В каждой точке множества M обе функции $f(x) = 4x$ и $g(x) = (1 - x^2)$ положительны. Поэтому неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$4x < 1 - x^2. \qquad (2)$$

Множество решений неравенства (2) составляет интервал $(-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5})$. Из них множеству M принадлежат лишь x из промежутка $(0; -2 + \sqrt{5})$. Следовательно, и равносильное ему на множестве M неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $(0; -2 + \sqrt{5})$.

2. Приведение подобных членов.

Пусть в каждой точке множества M определена функция $\varphi(x)$. Тогда на множестве M равносильны неравенства

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) > 0 \quad \text{и} \quad f(x) > 0.$$

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$(\sqrt{x}+1)^2 > 5x^2 - 3x + 2\sqrt{x}. \qquad (3)$$

Все решения неравенства (3) содержатся во множестве $M = [0; +\infty)$. Применяя формулу квадрата суммы и учитывая, что в каждой точке множества M определена функция $\varphi(x) = \sqrt{x}$, получим, что неравенство (3) равносильно на множестве M неравенству

$$5x^2 - 4x - 1 < 0. \qquad (4)$$

Множество всех решений неравенства (4) есть интервал $(-0{,}2; 1)$. Из этих чисел множеству M принадлежат лишь x из промежутка $[0; 1)$. Так как неравенство (3) равносильно на множестве M неравенству (4), то все решения неравенств (3) и (4) на множестве M совпадают. Следовательно, все решения неравенства (3) составляют промежуток $[0; 1)$.

Ответ. $[0; 1)$.

3. Применение формул.

Пусть в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т. п.). Тогда, применив эту формулу при решении неравенства, получим неравенство того же знака, равносильное на множестве M исходному неравенству.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\log_9 x^2 + 2\log_3 \sqrt{x} > (5-x)^{\log_{5-x} 2}. \qquad (5)$$

Все решения неравенства (5) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых $x > 0$, $5 - x > 0$ и $5 - x \neq 1$, т. е. содержатся во множестве $M = (0; 4) \cup (4; 5)$. В каждой точке множества M определены обе части формул $\log_9 x^2 = \log_3 x$, $2\log_3 \sqrt{x} = \log_3 x$, $(5-x)^{\log_{5-x} 2} = 2$. Поэтому неравенство (5) равносильно на множестве M неравенству

$$2\log_3 x > 2,$$

множество решений которого составляет интервал $(3; +\infty)$. Из них множеству M принадлежат лишь x из двух промежутков: $(3; 4)$ и $(4; 5)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (5) имеет только те же решения.

Ответ. $(3; 4) \cup (4; 5)$.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} + \sin x > 0. \qquad (6)$$

Все решения неравенства (6) содержатся во множестве M — всех $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} = \sin x$. Поэтому на множестве M неравенство (6) равносильно неравенству

$$2 \sin x > 0. \tag{7}$$

Множество решений неравенства (7) составляет серию промежутков $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из них множеству M принадлежат лишь x из двух серий промежутков: $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, множество решений неравенства (7) на множестве M составляют эти две серии промежутков. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (6) имеет те же решения.

Ответ. $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$\log_x 3 > 2 - \log_3 x. \tag{8}$$

Все решения неравенства (8) содержатся во множестве $M = (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формулы $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, поэтому неравенство (8) равносильно на множестве M неравенству

$$\frac{1}{\log_3 x} > 2 - \log_3 x,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{(\log_3 x - 1)^2}{\log_3 x} > 0. \tag{9}$$

Множество решений неравенства (9) составляет два промежутка: $(1;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$. Оба эти промежутка принадлежат множеству M, следовательно, являются решениями неравенства (8) на множестве M. Так как неравенства (8) и (9) равносильны на множестве M, то решения неравенства (8) составляют те же промежутки $(1;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$.

Ответ. $(1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

11.23 Докажите утверждение: 1) о потенцировании логарифмического неравенства; 2) о приведении подобных слагаемых; 3) о применении формул.

Решите неравенство **(11.24—11.33)**:

11.24 а) $\log_{25}(x^2-7) > \log_{25}(x-1)$;
б) $\log_7(x^2-4) > \log_7(3x+6)$;
в) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-3x) > \log_{\frac{1}{7}}(2x-4)$;
г) $\log_{\frac{1}{25}}(x^2-4x) > \log_{\frac{1}{25}}(2x-5)$.

11.25 а) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x) < 2$; б) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1) > 2$;
в) $\log_{0,5}(x^2-1) > -2$; г) $\log_{0,5}(x^2+1) < -1$.

11.26 а) $\log_3 243 \cdot \log_{0,8}(3x-5) > 0$; б) $\dfrac{\log_9(5x-4)}{\log_{0,4} 0{,}064} < 0$;
в) $\dfrac{\log_{0,2}(2-5x)}{\log_5 625} > 0$; г) $\log_{0,6} 0{,}216 \cdot \log_5(5-2x) < 0$.

11.27 а) $\log_{31}(8x-9)^2 > \log_{31}(9x-11)^2$;
б) $\log_{\frac{1}{31}}(4x-5)^2 > \log_{\frac{1}{31}}(5x-7)^2$.

11.28 а) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + x < \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + 5$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x+3}} + x < \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} + 4$;
в) $\dfrac{3}{\sqrt{x+4}} + x > \dfrac{3}{\sqrt{x+4}} + 3$; г) $\dfrac{4}{\sqrt{x+5}} + x > \dfrac{4}{\sqrt{x+5}} + 2$.

11.29 а) $\operatorname{tg} x + x^2 < \operatorname{tg} x + 2x + 3$; б) $\operatorname{tg} x + x^2 + 2x > \operatorname{tg} x + 3$;
в) $\operatorname{ctg} x + x^2 < \operatorname{ctg} x + x + 6$; г) $\operatorname{ctg} x + x^2 + x > \operatorname{ctg} x + 6$.

11.30 а) $(2\sqrt{x}+1)^2 > 5x^2 + 4\sqrt{x} - 63$; б) $(2\sqrt{x}-1)^2 < 2x^2 - 4\sqrt{x} - 125$;
в) $(3\sqrt{x}+2)^2 > 6x^2 + 12\sqrt{x} - 2$; г) $(3\sqrt{x}-2)^2 < 4x^2 - 12\sqrt{x} - 5$.

11.31 а) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} + \sin x < 0$; б) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \cos x > 0$;
в) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x > 2\sin x$; г) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x < 2\cos x$.

11.32 а) $2^{\log_2(3-2x)} < 4$; б) $3^{\log_3(7-4x)} > 27$.

11.33 а) $4\log_x 3 > \log_3 x - 3$; б) $2\log_x 5 > \log_5 x - 1$.

11.5*. Применение нескольких преобразований

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$\log_2 2x + \log_4 (x+1)^2 + \sqrt{x-1} > 2\log_2 (x+1) + \sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Все решения неравенства (1) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых справедливы неравенства $2x > 0$, $x + 1 > 0$ и $x - 1 \geqslant 0$, т. е. содержатся во множестве $M = [1; +\infty)$. В каждой точке множества M определена функция $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$ и определены обе части формул

$$\log_4 (x+1)^2 = \log_2 (x+1) \text{ и } 2\log_2 (x+1) = \log_2 (x+1)^2.$$

Поэтому неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$\log_2 2x + \log_2 (x+1) > \log_2 (x+1)^2. \qquad (2)$$

В каждой точке множества M определены обе части формулы

$$\log_2 2x + \log_2 (x+1) = \log_2 2x(x+1).$$

Поэтому неравенство (2) равносильно на множестве M неравенству

$$\log_2 2x(x+1) > \log_2 (x+1)^2. \qquad (3)$$

В каждой точке множества M положительны обе функции $f(x) = 2x(x+1)$ и $g(x) = (x+1)^2$. Поэтому неравенство (3) равносильно на множестве M неравенству

$$2x(x+1) > (x+1)^2. \qquad (4)$$

Множество решений неравенства (4) составляет интервал $(1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$, из них множеству M принадлежит лишь x из промежутка $[1; 1 + \sqrt{5})$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $[1; 1 + \sqrt{5})$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\sqrt{x} - 1 > \sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x} - 2x + 3\sqrt{x} - 7}. \qquad (5)$$

Возведя неравенство (5) в куб, получим неравенство

$$(\sqrt{x} - 1)^3 > x^2 + x\sqrt{x} - 2x + 3\sqrt{x} - 7, \qquad (6)$$

равносильное неравенству (5). Обе части неравенства (6) определены для всех $x \geqslant 0$, т. е. на множестве $M = [0; +\infty)$. Следовательно, все решения неравенства (6) принадлежат множеству M. Применяя формулу куба разности, перенося все члены неравенства (6) в правую часть и приводя подобные члены, получим неравенство

$$x^2 + x - 6 < 0, \qquad (7)$$

которое на множестве M равносильно неравенству (6).

Множество всех решений неравенства (7) есть интервал $(-3; 2)$. Из этого интервала множеству M принадлежат лишь x из промежутка $[0; 2)$. Следовательно, эти x и есть все решения неравенства (5).

Ответ. $[0; 2)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$2\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x-2}} < \frac{7}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}. \qquad (8)$$

Все решения неравенства (8) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых справедливо условие $(x-2)(x-3) > 0$, т. е. принадлежат множеству $M = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$ положительна, поэтому, умножив неравенство (8) на эту функцию и применив формулы

$$\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}\sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(x-3)^2},$$

обе части которых определены на множестве M, получим неравенство

$$2\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x-3)^2} < 7, \qquad (9)$$

равносильное неравенству (8) на множестве M.

а) Если x принадлежит множеству $M_1 = (-\infty; 2)$, то применяя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, получим, что неравенство (9) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$2(2-x) - (3-x) < 7, \qquad (10)$$

решения которого составляют промежуток $(-6; +\infty)$. Из этих чисел множеству M_1 принадлежат лишь x из промежутка $(-6; 2)$. Следовательно, неравенство (10) имеет на множестве M_1 решения, составляющие промежуток $(-6; 2)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M_1 неравенство (8) имеет те же решения на множестве M_1.

б) Если x принадлежит множеству $M_2 = (3; +\infty)$, то применяя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, получим, что неравенство (9) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$2(x-2) - (x-3) < 7, \qquad (11)$$

решения которого составляют промежуток $(-\infty; 8)$. Из этих чисел множеству M_2 принадлежат лишь x из промежутка $(3; 8)$. Следовательно, неравенство (11) имеет на множестве M_2 решения, составляющие промежуток $(3; 8)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M_2 неравенство (8) имеет те же решения на множестве M_2.

Объединяя решения, найденные в случаях а) и б), получаем, что множество решений неравенства (8) есть объединение промежутков $(-6; 2)$ и $(3; 8)$.

Ответ. $(-6; 2) \cup (3; 8)$.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$\log_{x-2}(9-x) > \log_{x-2}(x+1). \qquad (12)$$

Все решения неравенства (12) содержатся во множестве тех x, для каждого из которых справедливы неравенства $x-2>0$, $x-2\neq 1$, $9-x>0$, $x+1>0$, т. е. содержатся во множестве $M=(2;\ 3)\cup(3;\ 9)$. В каждой точке множества M определены обе части формул

$$\log_{x-2}(9-x)=\frac{\lg(9-x)}{\lg(x-2)} \text{ и } \log_{x-2}(x+1)=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-2)}.$$

Поэтому неравенство (12) равносильно на множестве M неравенству

$$\frac{\lg(9-x)}{\lg(x-2)} > \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-2)}. \qquad (13)$$

а) В каждой точке множества $M_1=(2;\ 3)$ функция $f(x)=\lg(x-2)$ определена и отрицательна, поэтому неравенство (13) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$\lg(9-x) < \lg(x+1). \qquad (14)$$

В каждой точке множества M_1 обе функции $\varphi(x)=9-x$ и $g(x)=x+1$ положительны. Поэтому неравенство (14) равносильно на множестве M_1 неравенству

$$9-x < x+1. \qquad (15)$$

Множество решений неравенства (15) составляет интервал $(4;\ +\infty)$. Ни одно из чисел этого интервала не принадлежит множеству M_1. Поэтому неравенство (15) не имеет решений на множестве M_1. Следовательно, и неравенство (12), равносильное неравенству (15) на множестве M_1, не имеет решений на множестве M_1.

б) В каждой точке множества $M_2=(3;\ 9)$ функция $f(x)=\lg(x-2)$ определена и положительна, поэтому неравенство (13) равносильно на множестве M_2 неравенству

$$\lg(9-x) > \lg(x+1). \qquad (16)$$

В каждой точке множества M_2 обе функции $\varphi(x)=9-x$ и $g(x)=x+1$ положительны. Поэтому неравенство (16) равносильно на множестве M_2 неравенству

$$9-x > x+1. \qquad (17)$$

Множество решений неравенства (17) составляет промежуток $(-\infty;\ 4)$, из которых множеству M_2 принадлежат лишь x из промежутка $(3;\ 4)$. Следовательно, неравенство (13) имеет на множестве M_2 решения, составляющие промежуток $(3;\ 4)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M_2 неравенство (12) имеет те же решения.

Так как в случае а) неравенство (12) решений не имеет, то все решения, найденные в случае б), составляют множество решений неравенства (12).

Ответ. (3; 4).

ПРИМЕР 5. Решим неравенство

$$x^4 > 2^{\log_2^2 x + 3}. \qquad (18)$$

Все решения неравенства (18) содержатся во множестве $M = (0; +\infty)$. В каждой точке множества M определены обе части формул $x^4 = 2^{\log_2 x^4}$ и $2^{\log_2 x^4} = 2^{4\log_2 x}$, поэтому неравенство (18) равносильно неравенству

$$2^{4\log_2 x} > 2^{\log_2^2 x + 3}. \qquad (19)$$

Логарифмируя показательное неравенство (19), получаем, что оно равносильно неравенству

$$4\log_2 x > \log_2^2 x + 3, \qquad (20)$$

решения которого составляют промежуток (1; 3). Все эти числа принадлежат множеству M. Следовательно, неравенство (20) имеет на множестве M решения, составляющие промежуток (1; 3). Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (18) имеет те же решения.

Ответ. (1; 3).

Решите неравенство **(11.34—11.46):**

11.34 а) $\sqrt{x} - 2 > \sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x} - 2x + 12\sqrt{x} - 13}$;

б) $\sqrt{x} + 1 > \sqrt[3]{x^2 + x\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 7}$.

11.35 а) $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x-4}} - \sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} < \dfrac{5}{\sqrt{(x-4)(x-1)}}$;

б) $4\sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}} + \sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}} > \dfrac{9}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$.

11.36 а) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{2x-5}{2}} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{6x^2 - 31x + 25}}$; б) $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{x-3} < \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\sqrt{5x^2 - 41x + 36}}$.

11.37 а) $\dfrac{\sqrt{13x+25}}{|x-2|} > \dfrac{\sqrt{11x+23}}{|x-2|}$; б) $\dfrac{\sqrt{9x+45}}{|x+2|} < \dfrac{\sqrt{7x+15}}{|x+2|}$.

11.38 а) $\dfrac{|x^2 - 5x + 4|}{|x^2 - 4|} < 1$; б) $\dfrac{|x^2 - 10x + 9|}{|x^2 - 9|} > 1$.

11.39 а) $\sqrt{x+3}\sqrt{x+8} > 2x+4$; б) $\sqrt{x+3}\sqrt{x+6} < x+4$;
в) $\sqrt{2x+3}\sqrt{3x+7} > 2x+4$; г) $\sqrt{2x-1}\sqrt{3x-2} < 4x-3$.

11.40 а) $\lg(x+1)+\lg(x-8) > \lg(2x-8)$;
б) $\log_2(x+1)+\log_2(3x-1) > \log_2(9x+5)$;
в) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}(5x-1)$;
г) $\log_{\frac{1}{3}}(4x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{3}}(10x+7)$.

11.41 а) $\log_{\frac{1}{11}}\frac{1}{2x-11} > \log_{\frac{1}{11}}\frac{1}{3x-20}$; б) $\log_{11}\frac{1}{4x-7} > \log_{11}\frac{1}{5x-14}$;
в) $\log_{\frac{1}{13}}\frac{1}{4x-17} > \log_{\frac{1}{13}}\frac{1}{5x-40}$; г) $\log_{13}\frac{1}{3x-22} > \log_{13}\frac{1}{4x-13}$.

11.42 а) $2\lg(x-1) < \lg(x+1)$; б) $2\lg(x+3) < \lg(x+5)$.

11.43 а) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-|\cos x|}{\sqrt{2x}+|\cos x|} > \dfrac{\sqrt{2x}-|\cos x|}{\sqrt{x^2+1}+|\cos x|}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}-|\sin x|}{\sqrt{3x}+|\sin x|} < \dfrac{\sqrt{3x}-|\sin x|}{\sqrt{x^2-4}+|\sin x|}$.

11.44 а) $\log_x\dfrac{7x-2}{2-x} < 0$; б) $\log_x\dfrac{3x-1}{14x-5} > 0$;
в) $\log_x\dfrac{6x-1}{13x-7} < 0$; г) $\log_x\dfrac{16x-11}{5x-1} > 0$.

11.45* а) $2+\log_{\sqrt{x^2-2x-3}}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right) > \log_{x^2-2x-3}(x^2-2x-2)^2$;

б) $2+\log_{\sqrt{-x^2+13x-36}}\dfrac{4,1-x}{x-9} > \log_{-x^2+13x-36}(x^2-10x+32,93)^2$.

11.46* а) $(4-x)^{x^2-9}-\sin^2 10^\circ < (4-x)^{\frac{1}{\log_{\cos 10^\circ}\sqrt{4-x}}}$;

б) $(5-x)^{x^2-4}-\cos^2 2002^\circ < (5-x)^{\frac{1}{\log_{\sin 2002^\circ}\sqrt{5-x}}}$.

11.47 При каких значениях параметра a все решения неравенства $\log_a(x-2) > \log_a(8-x)$ содержатся в интервале $(1; 5)$?

11.6*. Неравенства с дополнительными условиями

Довольно часто требуется решить неравенство при некоторых условиях. Дополнительные условия обычно означают, что надо решить неравенство на том или ином множестве. Иногда эти условия облегчают решение неравенства.

ПРИМЕР 1. Найдем все решения неравенства

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (1)$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Перенося все члены неравенства в левую часть и применяя формулу синуса двойного угла, перепишем неравенство (1) в виде $2\sin x\cos x - \cos x + \sqrt{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, или в виде

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0. \qquad (2)$$

Так как для всех $x \in M = \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ справедливо неравенство $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, то на множестве M неравенство (2) равносильно неравенству

$$\sin x > \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Все решения неравенства (3), принадлежащие множеству M, составляют промежуток $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Так как на множестве M неравенство (1) равносильно неравенству (3), то искомые решения неравенства (1) составляют тот же промежуток.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Часто дополнительное условие не облегчает решение неравенства. В таких случаях обычно сначала решают неравенство, а потом отбирают из найденных решений те, которые удовлетворяют условию.

ПРИМЕР 2. Найдем все решения неравенства

$$(\operatorname{tg} x - 1)\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0, \qquad (4)$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Перепишем неравенство (4) в виде

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \operatorname{tg} x < 1. \qquad (5)$$

Все решения неравенства (5) составляют серию промежутков

$$-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Из них отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат те, для которых

$$-\frac{\pi}{6}+\pi k\geqslant -\frac{9\pi}{2}\ \text{ и }\ \frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant -\frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, надо найти целые k, которые удовлетворяют двойному неравенству $-\frac{13}{3}\leqslant k\leqslant -\frac{7}{4}$. Это $k=-2$, $k=-3$, $k=-4$.

Итак, условию задачи удовлетворяют лишь x из промежутков $\left(-\frac{25\pi}{6};\ -\frac{15\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{19\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{4}\right)$ и $\left(-\frac{13\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{4}\right)$.

Ответ. $\left(-\frac{25\pi}{6};\ -\frac{15\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{19\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{13\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{4}\right)$.

Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку **(11.48—11.54)**:

11.48 а) $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$, $(0;\ \pi)$;

б) $\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

11.49 а) $(x-\log_3 75)(x-\log_2 22)>0$, $[3;\ 4]$;

б) $(x-\log_2 17)(x-\log_2 71)<0$, $[4;\ 5]$.

11.50 а) $x^4+x^3+x^2-3x>0$, $[-2;\ 2]$;

б) $x^4+x^3+x^2-14x<0$, $[1;\ 3]$.

11.51 а) $\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}>\cos x+\sqrt{2}\sin x$, $\left[\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right]$;

б) $\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin x-\cos x$, $[0;\ \pi]$.

11.52* а) $\sin\frac{\pi x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, $[-1;\ 5]$;

б) $\sin\frac{\pi x}{3}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}<0$, $[5;\ 13]$.

11.53 а) $\sqrt{\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x} > \cos x - \sin x$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$;

б) $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x} > \sin x - \cos x$, $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$.

11.54 а) $\cos 3x > |\cos x|$, $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$; б) $\sin 3x > |\sin x|$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

11.7*. Нестрогие неравенства

В п. 7.2 уже рассмотрено утверждение о решении нестрогих неравенств. Используя понятие совокупности, его можно переформулировать так:

$$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) > g(x). \end{array}\right.$$

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$(x-2)\sqrt{x-1} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Неравенство (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{ll} (x-2)\sqrt{x-1} = 0 & (2) \\ (x-2)\sqrt{x-1} > 0. & (3) \end{array}\right.$$

Уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$. Так как число 1 не является решением неравенства (3), то все решения неравенства (3) содержатся во множестве $M = (1; +\infty)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$ определена и положительна. Поэтому, умножив неравенство (3) на функцию $\frac{1}{\varphi(x)}$, получим, что неравенство (3) равносильно на множестве M неравенству

$$x - 2 > 0, \qquad (4)$$

множество всех решений которого составляет промежуток $(2; +\infty)$. Все эти x принадлежат множеству M. Следовательно, неравенство (4) имеет на множестве M решения, составляющие промежуток $(2; +\infty)$. Поэтому и равносильное ему на множестве M неравенство (3) имеет те же решения.

Объединяя все решения уравнения (2) и неравенства (3), получаем, что все решения совокупности (2) и (3), а значит, и равносильного ей неравенства (1) составляют множество $\{1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ. $\{1\} \cup [2; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(2 - x - x^2) \leqslant -1. \qquad (5)$$

Неравенство (5) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}}(2 - x - x^2) = -1 \qquad (6) \\ \log_{\frac{1}{2}}(2 - x - x^2) < -1. \qquad (7) \end{array}\right.$$

Потенцируя логарифмическое уравнение (6), получим уравнение

$$2 - x - x^2 = 2, \qquad (8)$$

являющееся следствием уравнения (6). Уравнение (8) имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют уравнению (6). Итак, уравнение (6) имеет корни x_1 и x_2.

Неравенство (7) равносильно неравенству

$$2 - x - x^2 > 2. \qquad (9)$$

Множество всех решений неравенства (9), а значит, и равносильного ему неравенства (7) составляет промежуток $(-1; 0)$.

Объединяя все решения уравнения (6) и неравенства (7), получаем, что все решения неравенства (5) составляют промежуток $[-1; 0]$.

Ответ. $[-1; 0]$.

Решите неравенство **(11.55—11.64)**:

11.55 а) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} \geqslant 0$; б) $(x^2 - 3x - 10)\sqrt{3 - x} \geqslant 0$;
в) $(x^2 - 2x - 15)\sqrt{x + 4} \leqslant 0$; г) $(x^2 + x - 6)\sqrt{x + 5} \leqslant 0$.

11.56 а) $\sqrt{x^2 - 9}\,(x + 8) \geqslant 0$; б) $(x - 4)\sqrt{x^2 - 4} \leqslant 0$;
в) $\sqrt{x^2 - 16}\,(x - 5) \geqslant 0$; г) $(x + 7)\sqrt{x^2 - 25} \leqslant 0$.

11.57 а) $\dfrac{\sqrt{12 - x - x^2}}{2x + 7} \leqslant \dfrac{\sqrt{12 - x - x^2}}{x - 5}$; б) $\dfrac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{2x + 9} \geqslant \dfrac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{x - 5}$;

в) $\dfrac{\sqrt{18 - 3x - x^2}}{x - 2} \leqslant \dfrac{\sqrt{18 - 3x - x^2}}{2x + 3}$; г) $\dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}$.

11.58 а) $\dfrac{(2x + 3)\sqrt{x - 2}}{x - 6{,}6} \geqslant \dfrac{5\sqrt{x - 2}}{x - 5}$; б) $\dfrac{3x + 1}{(2x + 1)\sqrt{2 - x}} \leqslant \dfrac{1}{(x + 1)\sqrt{2 - x}}$;

в) $\dfrac{(2x - 7)\sqrt{x - 1}}{x - 3} \geqslant \dfrac{9\sqrt{x - 1}}{5 - x}$; г) $\dfrac{1}{(x + 1)\sqrt{9 - x}} \leqslant \dfrac{4 - x}{(8 - x)\sqrt{9 - x}}$.

11.59 а) $0{,}0625 \cdot 4^x \leqslant 64^{\frac{1}{x}}$; б) $9 \cdot 3 \leqslant \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $0{,}2 \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; г) $7 \leqslant \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

11.60 а) $\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \geqslant 9^{4x}$; б) $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geqslant 8^{3x}$;

в) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$; г) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$.

11.61 а) $\lg x + \lg(x+3) \leqslant 1$; б) $\log_{\frac{1}{9}}(x+8) + \log_{\frac{1}{9}} x \geqslant -1$;

в) $\log_2 x + \log_2(x-2) \leqslant 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}}(x+6) + \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -3$.

11.62 а) $\frac{\sqrt{11x+5}}{|x-20|} \geqslant \frac{\sqrt{10x+13}}{|x-20|}$; б) $\frac{\sqrt{10x+17}}{|x-1|} \geqslant \frac{\sqrt{8x+11}}{|x-1|}$;

в) $\frac{\sqrt{9x+19}}{|x+2|} \leqslant \frac{\sqrt{11x+31}}{|x+2|}$; г) $\frac{\sqrt{8x+21}}{|x+1|} \leqslant \frac{\sqrt{10x+41}}{|x+1|}$.

11.63 а) $\sqrt{4\lg x - 24} \geqslant 9 - \lg x$; б) $\sqrt{9\lg x - 3} \leqslant 1 - 4\lg x$;

в) $\sqrt{4\lg x - 16} \geqslant 7 - \lg x$; г) $\sqrt{12\lg x - 8} \leqslant 1 - 3\lg x$.

11.64 а) $\log_{6x}(x^2 - 17x + 60) \leqslant 1$; б) $\log_{6x}(x^2 - 15x + 54) \geqslant 1$;
в) $\log_{12x}(x^2 - 19x + 84) \leqslant 1$; г) $\log_{7x}(x^2 - 16x + 60) \geqslant 1$.

§ 12. Метод промежутков для уравнений и неравенств

При решении некоторых задач удобно применять метод промежутков, заключающийся в том, что по тем или иным соображениям координатная ось разбивается на некоторое количество промежутков, а затем на каждом из них исследуется рассматриваемая задача.

В этом параграфе метод промежутков применяется для решения уравнений и неравенств.

12.1. Уравнения с модулями

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

такое, что его левая часть содержит модули некоторых функций $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, ..., $|f_n(x)|$.

Для решения таких уравнений обычно применяют **метод промежутков**, суть которого заключается в следующем.

Пусть дано уравнение (1). Сначала решают каждое из уравнений

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_n(x) = 0,$$

затем отмечают на координатной оси все найденные корни.

Таким образом, вся координатная ось разбивается на некоторое число промежутков (каждый из концов промежутка включают в один из двух соседних промежутков). Будем считать, что на каждом промежутке все функции $f_i(x)$ непрерывны, тогда на каждом интервале между точками деления все функции $f_i(x)$ знакопостоянны. Поэтому для них на этом промежутке или $|f_i(x)| = f_i(x)$, или $|f_i(x)| = -f_i(x)$. В результате на каждом таком промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному уравнению на этом промежутке, затем отыскиваются корни того уравнения, которое на этом промежутке получается. Наконец, отбираются те из них, которые принадлежат данному промежутку. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке. Все корни уравнения (1) получают, объединяя все его корни, найденные на всех промежутках.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| = 6. \qquad (2)$$

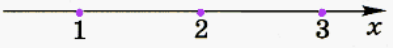


Рис. 171

Сначала решим уравнения $x-1=0$, $x-2=0$ и $x-3=0$ и отметим на координатной оси полученные корни: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ (рис. 171). Получим четыре числовых промежутка: $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3)$ и $[3; +\infty)$.

Решим уравнение (2) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; 1)$ по определению абсолютной величины $|x-1| = -(x-1)$, $|x-2| = -(x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, следовательно, на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению $-(x-1)-(x-2)-(x-3) = 6$, имеющему единственный корень $x_1 = 0$. Это число принадлежит промежутку $(-\infty; 1)$, следовательно, уравнение (2) на рассматриваемом промежутке имеет единственный корень 0.

2) На промежутке $[1; 2)$ по определению абсолютной величины $|x-1| = x-1$, $|x-2| = -(x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, следовательно, на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению $x-1-(x-2)-(x-3) = 6$, имеющему единственный корень $x_2 = -2$. Это число не принадлежит промежутку $[1; 2)$, следовательно, уравнение (2) на рассматриваемом промежутке не имеет корней.

3) На промежутке $[2; 3)$ по определению абсолютной величины $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$, $|x-3| = -(x-3)$, следовательно, на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению $x-1+x-2-(x-3) = 6$, имеющему единственный корень $x_3 = 6$. Это число не принадлежит промежутку $[2; 3)$, следовательно, уравнение (2) на рассматриваемом промежутке не имеет корней.

4) На промежутке $[3; +\infty)$ по определению абсолютной величины $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$, $|x-3| = x-3$, поэтому на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению $x-1+x-2+x-3=6$, имеющему единственный корень $x_4 = 4$. Это число принадлежит промежутку $[3; +\infty)$, следовательно, уравнение (2) на рассматриваемом промежутке имеет единственный корень 4.

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Ответ. 0; 4.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$(x+2)\cdot 2^{2-|x-2|} - x = (x+1)|2^x - 1| + 2^x + 1. \qquad (3)$$

Сначала решим уравнения $2^x - 1 = 0$ и $x - 2 = 0$ и отметим на координатной оси полученные корни $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ (рис. 172). Получим три числовых промежутка: $(-\infty; 0)$, $[0; 2]$ и $(2; +\infty)$.

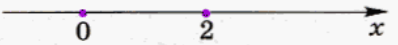


Рис. 172

Решим уравнение (3) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; 0)$ по определению абсолютной величины $|x-2| = 2-x$, $|2^x - 1| = 1 - 2^x$. Поэтому на промежутке $(-\infty; 0)$ уравнение (3) равносильно уравнению $(x+2)\cdot 2^x - x = (x+1)(1-2^x) + 2^x + 1$, которое можно переписать в виде $2(2^x - 1)(x+1) = 0$.

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, из которых только x_1 принадлежит промежутку $(-\infty; 0)$. Следовательно, на промежутке $(-\infty; 0)$ уравнение (3) имеет единственный корень $x_1 = -1$.

2) На промежутке $[0; 2]$ имеем: $|x-2| = 2-x$, $|2^x - 1| = 2^x - 1$. Поэтому на промежутке $[0; 2]$ уравнение (3) равносильно уравнению $(x+2)\cdot 2^x - x = (x+1)(2^x - 1) + 2^x + 1$, решением которого является любое x. Следовательно, любое x из рассматриваемого промежутка является решением уравнения (3).

3) На промежутке $(2; +\infty)$ имеем: $|x-2| = x-2$, $|2^x - 1| = 2^x - 1$. Поэтому на промежутке $(2; +\infty)$ уравнение (3) равносильно уравнению $(x+2)\cdot 2^{4-x} - x = (x+1)(2^x - 1) + 2^x + 1$, которое можно переписать в виде $(2^{4-x} - 2^x)(x+2) = 0$.

Это уравнение имеет два корня: $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, не принадлежащие рассматриваемому промежутку. Следовательно, на промежутке $(2; +\infty)$ уравнение (3) не имеет корней.

Итак, решением уравнения (3) является $x_1 = -1$ и любое x из промежутка $[0; 2]$.

Ответ. $\{-1\} \cup [0; 2]$.

Заметим, что иногда особенности решаемого уравнения могут подсказать более короткий способ решения.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение

$$|x-1| = 2|x| - 4. \qquad (4)$$

Заметим, что левая часть уравнения (4) неотрицательна для любого корня уравнения (4), поэтому все корни уравнения (4) должны удовлетворять условию $2|x| - 4 \geqslant 0$, т. е. условию $|x| \geqslant 2$. Это означает, что все корни уравнения (4) принадлежат множеству M, являющемуся объединением двух промежутков: $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$. Решим уравнение (4) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; -2]$ имеем $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x| = -x$, следовательно, на этом промежутке уравнение (4) равносильно уравнению $-(x - 1) = -2x - 4$, имеющему единственный корень $x_1 = -5$. Это число принадлежит промежутку $(-\infty; -2]$, поэтому уравнение (2) на рассматриваемом промежутке имеет единственный корень -5.

2) На промежутке $[2; +\infty)$ имеем $|x - 1| = x - 1$, $|x| = x$, следовательно, на этом промежутке уравнение (4) равносильно уравнению $x - 1 = 2x - 4$, имеющему единственный корень $x_2 = 3$. Это число принадлежит промежутку $[2; +\infty)$, следовательно, уравнение (4) на рассматриваемом промежутке имеет единственный корень 3.

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$.

Ответ. -5; 3.

Отметим еще специального типа уравнения с модулями. Их решают с помощью следующего утверждения.

Уравнение $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$|2^x - 4| + |3x - 15| = 2^x - 3x + 11. \qquad (5)$$

Если обозначить $f(x) = 2^x - 4$, $g(x) = -3x + 15$, то $f(x) + g(x) = 2^x - 3x + 11$, т. е. к уравнению (5) можно применить сформулированное утверждение. Поэтому уравнение (5) равносильно системе

$$\begin{cases} 2^x - 4 \geqslant 0 \\ -3x + 15 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Решения системы (6) составляют промежуток $[2; 5]$. Следовательно, и уравнение (5), равносильное системе (6), имеет те же решения.

Ответ. $[2; 5]$. ●

Решите уравнение (12.1—12.9):

12.1 а) $|x - 1| = 2x + 4$; б) $|x - 2| = 2x + 1$;
в) $|x - 1| + |x + 1| = 4$; г) $|x - 3| + |x + 3| = 8$;
д) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 2$; е) $|x + 1| + |x - 3| + |x - 5| = 7$.

12.2 а) $|x-1| = x^2 - 5x + 4$; б) $|x-2| = x^2 - 4x - 2$;
в) $|x-3| = x^2 - 6x + 3$; г) $|x-4| = x^2 - 2x - 2$.

12.3 а) $|x^2 + 4x + 2| = x + 2$; б) $|x^2 + 6x + 7| = -x - 3$;
в) $|x^2 - 2x - 2| = -x + 4$; г) $|x^2 - 4x + 1| = x + 1$.

12.4 а) $|x^2 - x - 1| = x^2 + 2x + 1$; б) $|x^2 - 2x - 2| = x^2 - 4x + 6$;
в) $|x^2 - 2x - 4| = x^2 - 4x + 4$; г) $|x^2 - 4x + 2| = x^2 - 6x + 10$.

12.5 а) $\dfrac{|2x-4| + |x-5|}{|x-1| + x - 1} = 1$; б) $\dfrac{|2x-1| - |x-5|}{|x+1| - x - 1} = -1$;

в) $\dfrac{|2x-5| + |x+2|}{|x-3| + x - 3} = -0{,}5$; г) $\dfrac{|2x-3| - |x+3|}{|x-4| - x + 4} = -1$.

12.6 а) $\dfrac{|x+1|}{x+1} + \dfrac{|x+3|}{x+3} = 0$; б) $\dfrac{|x-1|}{x-1} + \dfrac{|x+4|}{x+4} = -2$;

в) $\dfrac{|x-3| - |x-2|}{|x+1| + x + 1} = 0$; г) $\dfrac{|x-3| - |x-2|}{x - 4 - |x-4|} = 0$.

12.7 а) $|9 - 3^x| + |x - 6| = 3^x - x + 9$;
б) $|27 - 3^x| + |x - 5| = 3^x - x + 14$.

12.8 Докажите, что уравнение $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

12.9 Решите уравнение:

а) $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| + \left|\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sin x + \cos x - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$;

б) $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| + \left|\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

в) $|2^x - 4| + |4 - \sqrt{x}| = 2^x - \sqrt{x}$;

г) $|\log_3 x - 2| + |x^2 - 11x + 18| = \log_3 x - x^2 + 11x - 20$.

12.2. Неравенства с модулями

Пусть дано неравенство

$$f(x) > 0, \qquad (1)$$

такое, что его левая часть содержит модули некоторых функций $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, ..., $|f_n(x)|$.

Для решения таких неравенств обычно применяют **метод промежутков**, суть которого заключается в следующем.

Пусть дано неравенство (1). Сначала решают каждое из уравнений $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ..., $f_n(x) = 0$, затем отмечают на координатной оси все найденные корни.

Таким образом, вся координатная ось разбивается на некоторое число промежутков (каждый из концов промежутка включают в один из двух соседних промежутков). Будем считать, что на каждом промежутке все функции $f_i(x)$ непрерывны, тогда на каждом интервале между точками деления все функции $f_i(x)$ знакопостоянны. Поэтому для них на этом промежутке или $|f_i(x)| = f_i(x)$, или $|f_i(x)| = -f_i(x)$. В результате на каждом таком промежутке неравенство заменяется на другое неравенство, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному неравенству на этом промежутке, затем отыскиваются все решения того неравенства, которое на этом промежутке получается. Наконец, отбираются из них те, которые попадают в данный промежуток. Они и составляют множество всех решений исходного неравенства на рассматриваемом промежутке. Для того чтобы выписать множество всех решений исходного неравенства, объединяют все его решения, найденные на всех промежутках.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$|x^2 - 4| + |x + 1| - 3 > 0. \qquad (2)$$



Рис. 173

Сначала решим уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $x + 1 = 0$ и отметим на координатной оси полученные корни: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$ (рис. 173).

Получим четыре числовых промежутка: $(-\infty; -2]$, $(-2; -1)$, $[-1; 2)$, $[2; +\infty)$.

Решим неравенство (2) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; -2]$ по определению абсолютной величины $|x^2 - 4| = x^2 - 4$, $|x + 1| = -x - 1$. Следовательно, на этом промежутке неравенство (2) равносильно неравенству

$$x^2 - 4 - x - 1 - 3 > 0.$$

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество его решений есть множество $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$.

Из этого множества в промежутке $(-\infty; -2]$ содержится лишь интервал $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{2}\right)$. Следовательно, множество решений неравенства (2) на промежутке $(-\infty; -2]$ составляет интервал $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{2}\right)$.

2) На промежутке $(-2; -1)$ имеем $|x^2 - 4| = -x^2 + 4$, $|x + 1| = -x - 1$. Поэтому на этом промежутке неравенство (2) равносильно неравенству $-x^2 + 4 - x - 1 - 3 > 0$.

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество всех его решений составляет интервал $(-1; 0)$. Ни одного числа из этого интервала не содержится в промежутке $(-2; -1)$. Следовательно, на промежутке $(-2; -1)$ неравенство (2) не имеет решений.

3) На промежутке $[-1; 2)$ имеем $|x^2 - 4| = -x^2 + 4$, $|x + 1| = x + 1$. Поэтому на этом промежутке неравенство (2) равносильно неравенству $-x^2 + 4 + x + 1 - 3 > 0$.

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество всех его решений составляет интервал $(-1; 2)$. Все это множество содержится в промежутке $[-1; 2)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (2) на промежутке $[-1; 2)$ составляет интервал $(-1; 2)$.

4) На промежутке $[2; +\infty)$ имеем $|x^2 - 4| = x^2 - 4$, $|x + 1| = x + 1$. Поэтому на этом промежутке неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 - 4 + x + 1 - 3 > 0$.

Решая это квадратное неравенство, получаем, что множество всех его решений есть множество $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Из этого множества в промежутке $[2; +\infty)$ содержится лишь интервал $(2; +\infty)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (3) на промежутке $[2; +\infty)$ составляет интервал $(2; +\infty)$.

Объединяя множества решений, найденные на рассмотренных промежутках, получаем, что все решения неравенства (2) составляют множество $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ. $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{33}}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$(x + 4) \cdot 3^{1 - |x - 1|} - x < (x + 1) \cdot |3^x - 1| + 3^{x+1} + 1. \qquad (3)$$

Сначала решим уравнения $x - 1 = 0$ и $3^x - 1 = 0$ и отметим на координатной оси полученные корни: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ (рис. 174).



Рис. 174

Получим три числовых промежутка: $(-\infty; 0)$, $[0; 1]$, $(1; +\infty)$. Решим неравенство (3) на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $(-\infty; 0)$ по определению абсолютной величины $|x - 1| = 1 - x$, $|3^x - 1| = 1 - 3^x$. Поэтому на этом промежутке неравенство (3) равносильно неравенству

$$(x + 4) \cdot 3^x - x < (x + 1)(1 - 3^x) + 3^{x+1} + 1,$$

которое можно переписать в виде

$$2(x+1)(3^x-1)<0. \qquad (4)$$

Так как для любого x из рассматриваемого промежутка $3^x-1<0$, то все решения неравенства (4) есть решения неравенства $x+1>0$, т. е. все $x\in(-1;+\infty)$. Из них рассматриваемому промежутку принадлежат только x из интервала $(-1;0)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (3) на промежутке $(-\infty;0)$ составляет интервал $(-1;0)$.

2) На промежутке $[0;1]$ имеем $|x-1|=1-x$, $|3^x-1|=3^x-1$. Тогда на этом промежутке неравенство (3) равносильно неравенству $(x+4)\cdot 3^x-x<(x+1)\cdot(3^x-1)+3^{x+1}+1$, которое можно переписать в виде

$$(x+4)\cdot 3^x<(x+4)\cdot 3^x. \qquad (5)$$

Очевидно, что нет ни одного x, удовлетворяющего неравенству (5). Следовательно, на рассматриваемом промежутке неравенство (3) не имеет решений.

3) На промежутке $(1;+\infty)$ имеем $|x-1|=x-1$, $|3^x-1|=3^x-1$. Тогда на этом промежутке неравенство (3) равносильно неравенству

$$(x+4)\cdot 3^{2-x}-x<(x+1)\cdot(3^x-1)+3^{x+1}+1,$$

которое можно переписать в виде

$$(x+4)\cdot(3^{2-x}-3^x)<0. \qquad (6)$$

Так как для любого x из рассматриваемого промежутка $x+4>0$, то все решения неравенства (6) есть решения неравенства $3^{2-x}<3^x$, которое равносильно неравенству

$$2-x<x. \qquad (7)$$

Множество решений неравенства (7) есть интервал $(1;+\infty)$. Все эти x принадлежат рассматриваемому промежутку. Следовательно, множество всех решений неравенства (3) на промежутке $(1;+\infty)$ есть весь этот промежуток.

Объединяя решения, найденные выше, получаем, что множество всех решений неравенства (3) есть объединение двух интервалов: $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$.

Ответ. $(-1;0)\cup(1;+\infty)$. ●

Решите неравенство **(12.10—12.16)**:

12.10 а) $|3x-6|>x+2$; б) $|2x-5|<x-1$;
в) $|3x-7|>2x-3$; г) $|2x-7|<0{,}5x+2$.

12.11 а) $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2$; б) $\dfrac{|x-2|+8}{3|x-2|+1} < 3$;

в) $\dfrac{|x-3|+6}{2|x-3|+1} < 4$; г) $\dfrac{|x-2|+7}{3|x-2|+2} > 1$.

12.12 а) $|x+1|+|x+3|<8$; б) $|x+2|+|x+4|<6$;

в) $|x+3|+|x-2|>5$; г) $|x+7|+|x+1|>9$.

12.13* а) $|x^2-9|+|x+4|\geqslant 7$; б) $|x^2-16|+|x-5|\geqslant 9$;

в) $|x^2-4|+|x-3|\leqslant 5$; г) $|x^2-1|+|x-2|\leqslant 3$.

12.14 а) $\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-2|}{x-2}\geqslant 0$; б) $\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-6|}{x-6}\geqslant 2$;

в) $\dfrac{|x-5|-|x-3|}{|x-2|+x-2}\geqslant 0$; г) $\dfrac{|x-7|-|x-3|}{x-8-|x-8|}\geqslant 0$.

12.15 а) $2|x|(x^2-4x+3)+x|x^2-4x+3|>0$;

б) $2|x-1|(x^2-4x+3)+(x-1)|x^2-4x+3|<0$;

в) $2|x|(x^2-5x+6)+x|x^2-5x+6|\leqslant 0$;

г) $2|x-1|(x^2-5x+6)+(x-1)|x^2-5x+6|\leqslant 0$.

12.16* а) $(x+2)\cdot 2^{2-|x-2|}-x<(x+1)\cdot|2^x-1|+2^x+1$;

б) $(x+2)\cdot 4^{1-|x-1|}-x<(x+1)\cdot|4^x-1|+4^x+1$.

12.3. Метод интервалов для непрерывных функций

Пусть надо решить неравенство $f(x)>0$ (или $f(x)<0$). Пусть M — область существования функции $f(x)$ — состоит из объединения конечного числа промежутков X_k, $k=1, 2, \ldots, n$, занумерованных в порядке следования слева направо. При этом если $n>1$, то промежутки X_1 и X_n могут быть бесконечными: $(-\infty; a)$ или $(-\infty; a]$ и $(b; +\infty)$ или $[b; +\infty)$, а промежутки $X_2, \ldots, X_{n-1}$ соответственно могут быть отрезками $[c; d]$, полуинтервалами $[c; d)$, $(c; d]$ и интервалами $(c; d)$, где a, b, c, d — данные числа и $c<d$.

В случае же $n=1$ множество X_1 может быть любым из перечисленных промежутков, а также промежутком $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим случай, когда на каждом из промежутков X_k функция $f(x)$ непрерывна и имеет конечное число нулей.

Сначала проверим справедливость неравенства в каждой точке — конце отрезка или полуинтервала X_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Затем, исключив из множества M все эти концы отрезков и полуинтервалов и все нули функции $f(x)$, получим множество M_1, состоящее только из интервалов (при этом некоторые из промежутков X_k могут разбиться на конечное число интервалов). На каждом из полученных интервалов функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль. Зна-

чит, на каждом из них она сохраняет постоянный знак, т. е. для каждого x из этого интервала она принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения. Выбирая в каждом из них некоторую точку x_0 и определяя знак $f(x_0)$, этот знак ставят над каждым интервалом. Тогда решения неравенства $f(x) > 0$ на множестве M_1 составляют объединение тех интервалов, над которыми поставлен знак «+», а решения неравенства $f(x) < 0$ на множестве M_1 составляют объединение тех интервалов, над которыми поставлен знак «−». Объединяя решения, найденные на множестве M_1 и в точках — концах отрезков и полуинтервалов, получим множество всех решений данного неравенства.

ПРИМЕР 1. Решим неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-1}}(4-x)\log_3(3+x) > 0. \qquad (1)$$

Область существования функции

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2-1}}(4-x)\log_3(3+x), \qquad (2)$$

множество M, состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x^2 - 1 \geqslant 0$ и $3 + x > 0$, т. е. множество M есть объединение промежутков $(-3; -1]$ и $[1; +\infty)$. Так как $f(-1) = 5\log_3 2 > 0$, $f(1) = 3\log_3 4 > 0$, то точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — концы полуинтервалов — удовлетворяют неравенству (1).

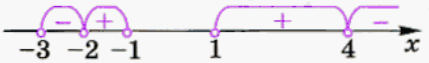


Рис. 175

Нули функции (2) есть $x_3 = 4$, $x_4 = -2$. Исключив их и концы полуинтервалов из множества M, получим множество M_1, состоящее только из интервалов $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$ (рис. 175). Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из этих интервалов. Определим знак функции (2) на каждом из этих интервалов.

Поскольку $-2{,}5 \in (-3; -2)$ и $f(-2{,}5) < 0$, $-1{,}5 \in (-2; -1)$ и $f(-1{,}5) > 0$, $2 \in (1; 4)$ и $f(2) > 0$, $5 \in (4; +\infty)$ и $f(5) < 0$, то на интервалах $(-3; -2)$ и $(4; +\infty)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервалах $(-2; -1)$ и $(1; 4)$ — положительные значения.

Следовательно, множество всех решений неравенства (1) есть объединение интервалов $(-2; -1)$ и $(1; 4)$ и точек $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Ответ. $(-2; -1] \cup [1; 4)$.

Если надо решить нестрогое неравенство $f(x) \geqslant 0$ (или $f(x) \leqslant 0$), то к полученному описанным выше способом множеству всех решений неравенства $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$) надо добавить все нули функции.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$\frac{(2x+5)\left(16^{\frac{1}{x}} - 2\right)}{(4^x - 32)\sqrt{x+5}} \geqslant 0. \qquad (3)$$

Область существования функции

$$f(x)=\frac{(2x+5)\left(16^{\frac{1}{x}}-2\right)}{(4^x-32)\sqrt{x+5}}$$

состоит из всех x, которые одновременно удовлетворяют условиям $x>-5$, $4^x\neq 32$ и $x\neq 0$, т. е. множество M есть объединение трех интервалов: $(-5;\ 0)$, $(0;\ 2{,}5)$ и $(2{,}5;\ +\infty)$.

Нули функции $f(x)$ есть $x_1=-2{,}5$, $x_2=4$. Исключив их из множества M, получим множество M_1, состоящее из интервалов $(-5;\ -2{,}5)$, $(-2{,}5;\ 0)$, $(0;\ 2{,}5)$, $(2{,}5;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$. Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из этих интервалов. Определим знак функции $f(x)$ на каждом из них (рис. 176).

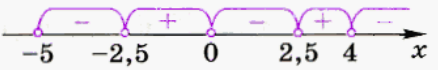


Рис. 176

Поскольку $-3\in(-5;\ -2{,}5)$ и $f(-3)<0$, $-1\in(-2{,}5;\ 0)$ и $f(-1)>0$, $1\in(0;\ 2{,}5)$ и $f(1)<0$, $3\in(2{,}5;\ 4)$ и $f(3)>0$, $5\in(4;\ +\infty)$ и $f(5)<0$, то на интервалах $(-5;\ -2{,}5)$, $(0;\ 2{,}5)$ и $(4;\ +\infty)$ функция принимает отрицательные значения, а на интервалах $(-2{,}5;\ 0)$ и $(2{,}5;\ 4)$ — положительные значения.

Следовательно, множество всех решений неравенства (3) есть объединение интервалов $(-2{,}5;\ 0)$, $(2{,}5;\ 4)$ и чисел $x_1=-2{,}5$ и $x_2=4$ — нулей функции $f(x)$.

Ответ. $[-2{,}5;\ 0)\cup(2{,}5;\ 4]$.

12.17° Объясните на примере, в чем заключается метод интервалов для непрерывных функций.

Решите неравенство **(12.18—12.23)**:

12.18 а) $\dfrac{(x-2)(x^2-2x+11)}{x-7}>0$; б) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+8)}{x+1}<0$;

в) $\dfrac{(x-3)(x^2-\pi x+5)}{x-4}>0$; г) $\dfrac{(x+1)(x^2-ex+4)}{x+5}<0$.

12.19 а) $\dfrac{(2^x-8)(\lg x-1)}{(\log_{\frac{1}{2}}x+1)\sqrt{12-x}}>0$; б) $\dfrac{(3^x-81)(\log_2 x-2)}{(\log_{\frac{1}{3}}x+1)\sqrt{5-x}}<0$;

в) $\dfrac{2^{\log_2(x-1)}\cdot(\log_{0,2}x+1)}{|x-4|\sqrt{6-x}}>0$; г) $\dfrac{10^{|\lg|x-3|}\cdot(\log_{0,25}x+1)}{(\log_2 x-3)\sqrt{8-x}}<0$.

12.20 а) $(x^2-4x)\sqrt{9-x^2}\leqslant 0$; б) $(x^2-x-30)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$;

в) $(x^2-6x+8)\sqrt{x^2-9}\geqslant 0$; г) $(x^2-x-12)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0$.

12.21 а) $\dfrac{(x-2)^4(1+\log_{0,5}x)}{2x-7}\leqslant 0$; б) $\dfrac{(3x-1)^2(x-3)}{2^x-4}\leqslant 0$;

в) $\dfrac{(x-4)^2(2+\log_{\frac{1}{3}}x)}{x-1}\leqslant 0$; г) $\dfrac{(x^2-11x+10)(\lg x-1)}{(2^x-2)^2}\leqslant 0$.

12.22 а) $\dfrac{2^{x-1}+6\cdot 4^x+1}{3\cdot 4^x-10\cdot 2^{x-1}-28}\geqslant -1$; б) $\dfrac{5\cdot 2^{x-1}-2\cdot 4^x-26}{3\cdot 4^x-7\cdot 2^{x-1}-34}\geqslant 1$.

12.23 а) $2^{\sqrt{x^2-9}}(x-5)\log_6(9-x)<0$;

б) $3^{\sqrt{x^2-16}}(6-x)\log_2(12+x)>0$.

§ 13*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств

Имеется довольно много уравнений и неравенств, которые можно (и нужно) решать не описанными выше методами, а с использованием свойств функций, входящих в это уравнение или неравенство. Часто оказывается, что такой метод дает возможность решить уравнение или неравенство проще, чем с помощью описанных выше методов, а иногда решить их в тех случаях, когда эти методы не дают такой возможности.

В данном параграфе приведено несколько методов решения уравнений и неравенств с использованием свойств функций.

13.1*. Использование областей существования функций

Если при рассмотрении уравнения (неравенства) выясняется, что обе его части определены на множестве M, состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования уравнения (неравенства), достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного уравнения (неравенства).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$3^{\sqrt{4-x^2}}=\lg(1+\sqrt{x^2-4})+3x-x^2-1. \qquad (1)$$

Обе части уравнения (1) определены лишь для таких x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ 4-x^2\leqslant 0.\end{cases} \qquad (2)$$

Все решения системы (2) состоят из двух чисел: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Поэтому если уравнение (1) имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. Проверка показывает, что число x_1 удовлетворяет уравнению (1), а число x_2 ему не удовлетворяет. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 2.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$(\sqrt{x^2 - 6x + 5} + 1)\log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}(\sqrt{12x - 2x^2 - 10} + 1) > 0. \qquad (3)$$

Обе части неравенства (3) определены лишь для таких x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geqslant 0 \\ 12x - 2x^2 - 10 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Системе неравенств (4) удовлетворяют лишь два числа: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Поэтому если неравенство (3) имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. Проверка показывает, что число x_2 удовлетворяет неравенству (3), а число x_1 — нет. Следовательно, неравенство (3) имеет единственное решение x_2.

Ответ. 5.

Если множество M, на котором определены обе части уравнения (неравенства), окажется пустым множеством, то ответ в таком случае ясен — уравнение (неравенство) не имеет решений.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sqrt{1 - x^2} > \lg(x - 2). \qquad (5)$$

Обе части неравенства (5) определены лишь для таких x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств не имеет решений. Поэтому множество, на котором определены обе части неравенства (5), — пустое множество. Следовательно, неравенство (5) не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

Иногда знание множества M, на котором определены обе части уравнения (неравенства), помогает его решать даже в случае, когда множество M — бесконечное множество чисел.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$2^{\sqrt{\cos x - 1}} + \log_2(x^2 + 1) > \sin x + 1. \qquad (6)$$

Обе части неравенства (6) определены лишь для таких x, для которых $\cos x \geqslant 1$. Учитывая, что $\cos x \leqslant 1$ для любого x, получаем, что обе части неравенства (6) определены лишь для таких x, для которых $\cos x = 1$, т. е. для $x_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому если неравенство (6) имеет решения, то они могут быть только среди этих чисел x_k. Так как

$$2^{\sqrt{\cos x_k - 1}} + \log_2(x_k^2 + 1) = 1 + \log_2(4k^2\pi^2 + 1), \text{ а } \sin x_k + 1 = 1,$$

то остается выяснить, для каких k справедливо неравенство

$$\log_2(4k^2\pi^2 + 1) > 0. \qquad (7)$$

Очевидно, что для $k = 0$ неравенство (7) не выполняется, а для любого $k \neq 0$ выполняется. Следовательно, все решения неравенства (6) составляют числа $x_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$.

Ответ. $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2} = 1. \qquad (8)$$

Обе части уравнения (8) определены лишь для таких x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^3 + 2 \geqslant 0 \\ x^3 - 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

т. е. на множестве $M = [\sqrt[3]{2}; +\infty)$. Поэтому если уравнение (8) имеет решения, то они принадлежат множеству M.

Для каждого $x \in M$ имеем $\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2} \geqslant \sqrt{x^3 + 2} \geqslant 2$, т. е. любое $x \in M$ не удовлетворяет уравнению (8). Следовательно, уравнение (8) не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

Решите уравнение **(13.1—13.2)**:

13.1 а) $5\sqrt{-x^2 + 9x - 14} - 2\sqrt[4]{x^2 - 5x - 14} - 1 = \sin\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $3\sqrt{-x^2 + 11x - 30} - 4\sqrt[4]{x^2 - 7x + 6} = \sin \pi x$;

в) $2001\sqrt[4]{x^2 - 9} + 2002\sqrt{9 - x^2} = \cos\dfrac{\pi x}{2}$;

г) $2003\sqrt[4]{x^2 - 4} + 2004\sqrt{4 - x^2} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

13.2 а) $5^{\sqrt{16 - x^2}} + 3 = \lg(1 + \sqrt{x^2 - 16}) + x$;

б) $9^{\sqrt{1 - x^2}} - 2 = \lg(1 + \sqrt{x^2 - 1}) + x$;

в) $\sqrt[4]{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 - 8} = 2$;

г) $\sqrt[6]{x^5 - 32} + \sqrt[6]{x^5 + 32} = 2$.

Решите неравенство (13.3—13.5):

13.3 а) $e^{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{x^2-7x-8}\geqslant -6$; б) $\pi^{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{x^2-x-6}\geqslant 6$;

в) $\sqrt{x^2-4x-5}+\lg(1+\sqrt{8x-2x^2+10})\leqslant 6$;

г) $\sqrt{x^2-x-6}+10^{\sqrt{4-x^2}}+5\lg(12+x)\leqslant 6$.

13.4 а) $(\sqrt{x^2-81}+2)\log_3|x|+\frac{9}{x}(\sqrt{81-x^2}+1)>4$;

б) $(\sqrt{x^2-16}+1)\log_3(x^2-7)-\frac{x}{2}(\sqrt{16-x^2}+3)<0$;

в) $\sqrt{x^2-7x+10}>\lg(\sqrt{7x-x^2-10}+2)$;

г) $\sqrt{x^2+7x+10}<\lg(-5x+\sqrt{-x^2-5x-6})$.

13.5 а) $3^{\sqrt{\sin x-1}}+\log_3(x^2+3)>\cos x+2$;

б) $4^{\sqrt{\cos x-1}}+\log_3\frac{x}{2\pi}>\cos x+1$.

13.2*. Использование неотрицательности функций

Пусть функция $F(x)$ есть сумма нескольких функций

$$F(x)=f_1(x)+\ldots+f_n(x),$$

каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее существования. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Уравнение $F(x)=0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

б) Неравенство $F(x)\leqslant 0$ равносильно системе уравнений (1).

Например, уравнение $f_1^2(x)+f_2^2(x)+\ldots+f_n^2(x)=0$ и неравенство $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|\leqslant 0$ равносильны системе уравнений (1).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$x^4+5\cdot 4^x+4x^2\cdot 2^x-2\cdot 2^x+1=0. \qquad (2)$$

Перепишем уравнение (2) в виде

$$(x^2+2\cdot 2^x)^2+(2^x-1)^2=0. \qquad (3)$$

Каждая из функций $(x^2 + 2 \cdot 2^x)^2$ и $(2^x - 1)^2$ неотрицательна для любого $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому уравнение (3) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ x^2 + 2 \cdot 2^x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) имеет единственное решение $x_1 = 0$, которое не удовлетворяет второму уравнению системы (4). Следовательно, система (4), а значит, и равносильное ей уравнение (2) не имеют решений.

Ответ. Нет решений.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$1 - \sqrt{1 - x^2 - x^4} + \log_2(1 + x^2) = 0. \tag{5}$$

Каждая из функций $1 - \sqrt{1 - x^2 - x^4}$ и $\log_2(1 + x^2)$ неотрицательна для любого x из области ее существования.

Поэтому уравнение (5) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - x^4} = 1 \\ \log_2(1 + x^2) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

имеющей единственное решение $x_1 = 0$.

Следовательно, уравнение (5), равносильное системе (6), имеет единственное решение x_1.

Ответ. 0.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg^2(x^2 - 4x + 1) \leqslant 0. \tag{7}$$

Каждая из функций $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ и $y = \lg^2(x^2 - 4x + 1)$ неотрицательна для любого x из области ее существования. Поэтому неравенство (7) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \lg^2(x^2 - 4x + 1) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Первое уравнение системы (8) имеет два решения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Из этих чисел только число x_2 удовлетворяет второму уравнению системы (8). Следовательно, система (8), а значит, и равносильное ей уравнение (7) имеют единственное решение x_2.

Ответ. 4.

Решите уравнение **(13.6—13.9):**

13.6 а) $(\log_2(x - 5) - \sin \pi x)^2 + (x - 6)^2 = 0$;

б) $\left(\log_3(x - 2) - \sin \dfrac{\pi x}{2}\right)^2 + (x - 5)^2 = 0.$

13.7 а) $9^x - 2 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$;
б) $25^x - 5 \cdot 10^x + 29 \cdot 4^{x-1} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$.

13.8 а) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} + |\log_{0,6}(x^2 - 14x + 50)| = 0$;
б) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + |\log_{0,7}(x^2 - 10x + 26)| = 0$.

13.9 а) $\log_2(x^2 + 2x + 2) + \log_3(x^6 + 2x^5 + x^4 + 1) = 0$;
б) $\log_4(x^2 + 4x + 5) + \log_5(x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 1) = 0$;
в) $\log_6(x^2 + 6x + 10) + \log_7^2(\sqrt[3]{x+2} + 2) = 0$;
г) $\log_8(x^2 + 8x + 17) + \log_9^2(\sqrt[5]{x - 28} + 3) = 0$.

Решите неравенство (13.10—13.11):

13.10 а) $(x^2 + 4x - 21)^2 + \lg(x^2 - 6x + 10) \leqslant 0$;
б) $(x^2 - 3x - 4)^2 + \lg(x^2 - 8x + 17) \leqslant 0$.

13.11 а) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \lg(x^2 - 10x + 26) \leqslant 0$;
б) $\sqrt{x^2 - 6x + 8} + \lg(x^2 - 8x + 17) \leqslant 0$.

13.12 Докажите, что не имеет корней уравнение:
а) $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 0$;
б) $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0$.

13.3*. Использование ограниченности функций

Пусть множество M есть общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x)$ и $g(x)$ и пусть для любого $x \in M$ справедливы неравенства $f(x) \geqslant A$ и $g(x) \leqslant A$, где A – некоторое число. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A. \end{cases} \qquad (1)$$

б) Неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ равносильно системе уравнений (1).

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2 - x + 1}. \qquad (2)$$

Обе части уравнения (2) определены для всех x. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{4}{\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}. \qquad (3)$$

Очевидно, что для любого x справедливы неравенства

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geqslant 4;\quad g(x)=\frac{4}{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\leqslant 4.$$

Следовательно, уравнение (3) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=4\\ \frac{4}{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}=4.\end{cases}$$

Эта система не имеет решений. Следовательно, и равносильное ей уравнение (2) не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$\cos^2(x\sin x)=1+|\log_5(x^2-x+1)|. \qquad (4)$$

Пусть множество M есть общая часть областей существования функций $\cos^2(x\sin x)$ и $1+|\log_5(x^2-x+1)|$, тогда для любого $x\in M$ имеем

$$\cos^2(x\sin x)\leqslant 1;\quad 1+|\log_5(x^2-x+1)|\geqslant 1.$$

Следовательно, уравнение (4) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\cos^2(x\sin x)=1\\ |\log_5(x^2-x+1)|=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Второе уравнение системы (5) имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=1$. Из этих чисел только число x_1 удовлетворяет первому уравнению системы (5). Следовательно, система (5), а значит, и равносильное ей уравнение (4) имеют единственное решение x_1.

Ответ. 0.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\lg(x^2+2x+2)+5\leqslant 4-2x-x^2. \qquad (6)$$

Обе части неравенства (6) определены для всех действительных чисел x. Для любого x имеем $\lg(x^2+2x+2)=\lg((x+1)^2+1)\geqslant 0$, поэтому $\lg(x^2+2x+2)+5\geqslant 5$; $4-2x-x^2=5-(x+1)^2\leqslant 5$. Следовательно, неравенство (6) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\lg(x^2+2x+2)+5=5\\ 4-2x-x^2=5,\end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 + 2x + 2) = 0 \\ (x+1)^2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Единственное решение второго уравнения системы (7) есть $x_1 = -1$. Это число удовлетворяет первому уравнению этой же системы. Следовательно, система (7), а значит, и равносильное ей неравенство (6) имеют единственное решение x_1.

Ответ. -1.

ПРИМЕР 4. Решим неравенство

$$|\lg(x-2)| + 1 \leqslant -\cos \pi x. \quad (8)$$

Обе части неравенства (8) определены на множестве $M = (2; +\infty)$. Для любого $x \in M$ имеем

$$|\lg(x-2)| + 1 \geqslant 1, \quad -\cos \pi x \leqslant 1.$$

Поэтому неравенство (8) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x-2) = 0 \\ \cos \pi x = -1. \end{cases} \quad (9)$$

Первое уравнение системы (9) имеет единственное решение $x_0 = 3$, которое удовлетворяет второму уравнению этой системы. Следовательно, система (9), а значит, и равносильное ей неравенство (8) имеют единственное решение x_0.

Ответ. 3.

При решении уравнений (или неравенств) часто применяют различные числовые неравенства. Например, неравенство

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2, \quad (10)$$

справедливое для любого положительного числа a.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x^2 + x}{6}. \quad (11)$$

Обе части уравнения (11) определены для всех x. Для любого x, применяя неравенство (10), получаем, что справедливо неравенство

$$2^x + 2^{-x} \geqslant 2. \quad (12)$$

Для любого x справедливо неравенство

$$2\cos\frac{x^2 + x}{6} \leqslant 2. \quad (13)$$

Из справедливости неравенств (12) и (13) следует, что уравнение (11) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2 \\ \cos\dfrac{x^2 + x}{6} = 1. \end{cases} \qquad (14)$$

Решим ее. Первое уравнение системы (14) имеет единственное решение $x_1 = 0$, которое удовлетворяет и второму уравнению этой же системы. Поэтому система (14), а значит, и равносильное ей уравнение (11) имеют единственное решение x_1.

Ответ. 0.

ПРИМЕР 6. Решим неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leqslant 2\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}. \qquad (15)$$

Пусть M — общая часть областей существования функций $\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{ctg}^2 x$ и $\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{16} - x^2}$. Тогда для любого $x \in M$, применяя неравенство (10), имеем

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2.$$

Очевидно, что для любого $x \in M$

$$2\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2} \leqslant 2.$$

Следовательно, неравенство (15) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \\ \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{16} - x^2} = 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Из последнего уравнения системы (16) находим его решения $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $x_2 = -\dfrac{\pi}{4}$. Подставляя эти числа в первое уравнение системы (16), получаем, что они являются его решениями. Поэтому числа x_1 и x_2 являются решениями системы (16). Следовательно, неравенство (15), равносильное системе (16), имеет те же решения.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}$.

Ограниченность функций на том или ином множестве — части области существования функции — также может использоваться при решении уравнения или неравенства.

ПРИМЕР 7. Решим неравенство

$$\log_2(x + 2) > \frac{x}{x + 0{,}5}. \qquad (17)$$

Обе части неравенства (17) определены для всех x, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} x+2>0 \\ x \neq -0{,}5, \end{cases}$ т. е. на множестве $M=(-2;\ -0{,}5) \cup (-0{,}5;\ +\infty)$. Следовательно, все решения неравенства (17) содержатся во множестве M.

Рассмотрим неравенство (17) сначала на множестве $M_1=(-2;\ -0{,}5)$. Для любого $x \in M_1$ имеем

$$\log_2(x+2) < \log_2 \frac{3}{2} < 1; \quad \frac{x}{x+0{,}5} = 1 - \frac{1}{2x+1} > 1.$$

Следовательно, среди этих x нет решений неравенства (17).

Теперь рассмотрим неравенство (17) на множестве $M_2=(-0{,}5;\ 0)$. Для любого $x \in M_2$ имеем

$$\log_2(x+2) > \log_2 \frac{3}{2} > 0; \quad \frac{x}{x+0{,}5} < 0.$$

Следовательно, любое x из множества M_2 является решением неравенства (17).

Наконец, рассмотрим неравенство (17) на множестве $M_3=[0;\ +\infty)$. Для любого $x \in M_3$ имеем

$$\log_2(x+2) \geqslant 1; \quad \frac{x}{x+0{,}5} = 1 - \frac{1}{2x+1} < 1.$$

Следовательно, любое x из множества M_3 является решением неравенства (17).

Объединяя все полученные выше решения, получаем, что все решения неравенства (17) составляют промежуток $(-0{,}5;\ +\infty)$.

Ответ. $(-0{,}5;\ +\infty)$.

Решите уравнение **(13.13—13.17)**:

13.13 а) $\lg(x^2+1)+1=\cos \pi x$;

б) $\lg(1+|x-2|)+2=|1+\cos \pi x|$;

в) $3-\lg(x^2-10x+26)=\sqrt{x^2-10x+34}$;

г) $2-\lg(1+|x-6|)=\sqrt{x^2-12x+40}$.

13.14 а) $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}=\sin x-1$; б) $x^2-4\pi x+4\pi^2=\cos x-1$;

в) $x^2+2\pi x+\pi^2=\sin x-1$; г) $x^2-2\pi x+\pi^2=\cos x-1$.

13.15 а) $2\cos^2(x \sin \pi x)=2+\log_2(x^2-4x+5)$;

б) $3\sin^2\left(\frac{\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}\right)=3+\log_3(x^2-6x+10)$.

13.16 а) $|\lg(x-3)|+2=|\cos\pi x+1|$;
б) $|\lg(x-2)|+1=-\cos\pi x$;
в) $|\lg(x-5)|+2=\sqrt{4-(x-6)^2}$;
г) $|\lg(x-4)|+3=\sqrt{9-(x-5)^2}$.

13.17 а) $2\cos^2(x\sin x)=2+|\log_2(x^2-4x+1)|$;
б) $3\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right)=3+\log_3(x^2-6x+10)$.

Решите неравенство **(13.18—13.20)**:

13.18 а) $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}\leqslant 3\sin x-3$;
б) $-x^2+2\pi x-\pi^2\geqslant 2\cos x+2$;
в) $\log_2(x^2+4x+5)\leqslant -4-4x-x^2$;
г) $\log_{0,6}(x^2-6x+10)\geqslant x^2-6x+9$.

13.19 а) $\log_2(x+2)>1-x$; б) $\log_2(x+4)<-1-x$;
в) $\log_{0,5}(x-2)>x-3$; г) $\log_{0,5}(x+2)<x-1$.

13.20 а) $\log_{0,2}(-x^2+6x-8)\leqslant -9+6x-x^2$;
б) $3\cos^2 x\geqslant 3+|\log_5(x^2-4x+1)|$.

Решите уравнение **(13.21—13.23)**:

13.21 а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2-\sin^2\frac{2001x}{2002}$;
б) $(\log_2 3)^x+(\log_3 2)^x=2-\cos^2\frac{\pi x+\pi}{2}$;
в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=1+\cos 2\pi x$;
г) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{5}{4}\right)^{x+1}=1-\cos\pi x$.

13.22 а) $\frac{\sqrt{\sin^2 x+5}+\sqrt{\cos^2 x+4}}{2}=\sqrt[4]{(\sin^2 x+5)(\cos^2 x+4)}$;
б) $\frac{\sqrt{\sin^2 x+\sin x+5}+\sqrt{\sin x+6}}{2}=\sqrt[4]{(\sin^2 x+\sin x+5)(\sin x+6)}$;
в) $\sqrt{3\log_2^2 x+5}+\sqrt{\log_2^4 x+1}=2\sqrt[4]{(3\log_2^2 x+5)(\log_2^4+1)}$;
г) $\sqrt{2-\frac{1}{2}\lg^2 x}+\sqrt{\lg^4 x+\frac{1}{2}}=2\sqrt[4]{\left(2-\frac{1}{2}\lg^2 x\right)\left(\lg^4 x+\frac{1}{2}\right)}$.

13.23* а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2\sqrt{\frac{5\pi^2}{16} - x^2}$;

б) $\frac{\cos^2 2x}{\sin^8 x} + \frac{\sin^8 x}{\cos^2 2x} = 2\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}$.

Решите неравенство **(13.24—13.26)**:

13.24* а) $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \leqslant 2 - \ln^2(x^2+x+1)$;

б) $\sqrt{x^2-3{,}5x+3{,}5} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3{,}5x+3{,}5}} \leqslant 2 - \sin^2\pi x$.

13.25 а) $\frac{\sqrt{\sin x+2} + \sqrt{\cos x+2}}{2} \leqslant \sqrt[4]{\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x + 4}$;

б) $\frac{\sqrt{\sin x+2} + \sqrt{\cos x+3}}{2} \leqslant \sqrt[4]{\sin x\cos x + 3\sin x + 2\cos x + 6}$.

13.26* а) $|\sin x| + \frac{1}{|\sin x|} \leqslant 2 - x^2 - \pi x - \frac{\pi^2}{4}$;

б) $|\cos x| + \frac{1}{|\cos x|} \leqslant 2 - x^2 + 2\pi x - \pi^2$;

в) $|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} \leqslant 2 - x^2 + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{16}$;

г) $|\operatorname{ctg} x| + \frac{1}{|\operatorname{ctg} x|} \leqslant 2 - x^2 - \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{16}$.

13.4*. Использование монотонности и экстремумов функций

При решении уравнения или неравенства часто бывает полезно доказать возрастание (убывание) на некотором промежутке функций, в него входящих. При этом часто пользуются следующим утверждением.

Пусть функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает на промежутке M — общей части (пересечении) областей существования этих функций. Если число $x_0 \in M$ и справедливо равенство $f(x_0) = g(x_0)$, то x_0 — единственный корень уравнения

$$f(x) = g(x). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть число $x_1 \in M$. Тогда:
если $x_1 < x_0$, то $f(x_1) < f(x_0) = g(x_0) < g(x_1)$, т. е. $f(x_1) < g(x_1)$;
если $x_1 > x_0$, то $f(x_1) > f(x_0) = g(x_0) > g(x_1)$, т. е. $f(x_1) > g(x_1)$.

Это означает, что ни одно из чисел $x \neq x_0$ из промежутка M не может быть корнем уравнения (1), а так как справедливо равенство $f(x_0) = g(x_0)$, то x_0 — единственный корень уравнения (1). Тем самым утверждение доказано.

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{2x+7} = \sqrt{19-x}. \qquad (2)$$

Функция $f(x) = \sqrt[3]{2x+7}$ возрастает, а функция $g(x) = \sqrt{19-x}$ убывает на промежутке $M = (-\infty; 19]$ — общей части областей существования этих функций. Проверка показывает, что число $10 \in M$ и является корнем уравнения (2). Тогда в силу доказанного утверждения этот корень единственный.

Ответ. 10.

Для доказательства возрастания (убывания) на некотором промежутке функции, входящей в уравнение (неравенство), часто используют производную этой функции.

ПРИМЕР 2. Решим неравенство

$$20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0. \qquad (3)$$

Перепишем неравенство (3) в виде

$$20x^7 + 28x^5 > 35\sin 2x - 210x. \qquad (4)$$

Рассмотрим функции $f(x) = 20x^7 + 28x^5$ и $g(x) = 35\sin 2x - 210x$ на $\boldsymbol{R}$ — области существования этих функций. Функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$ как сумма функций, возрастающих на $\boldsymbol{R}$. Функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, так как ее производная $g'(x) = 70\cos 2x - 210$ отрицательна на $\boldsymbol{R}$. Следовательно, уравнение

$$20x^7 + 28x^5 = 35\sin 2x - 210x \qquad (5)$$

имеет не более одного корня. Число $x_1 = 0$ удовлетворяет уравнению (5), следовательно, это уравнение имеет единственный корень x_1.

Поскольку функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, а функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то для каждого $x > 0$ справедливы неравенства $f(x) > f(0) = 0$, $g(x) < g(0) = 0$, откуда следует, что $f(x) > g(x)$ для каждого $x > 0$.

Аналогично показывается, что $f(x) < g(x)$ для каждого $x < 0$. Следовательно, решения неравенства (4), а значит, и равносильного ему неравенства (3) составляют промежуток $(0; +\infty)$.

Ответ. $(0; +\infty)$.

ПРИМЕР 3. Выясним, сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^3 - x^2 - x + 0{,}1 = 0. \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - x^2 - x + 0{,}1$. Она на интервале $(-\infty; +\infty)$ имеет производную $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Производная обращается в нуль в двух точках: $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$. Это точки локального экстремума функции $f(x)$. Так как $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, то на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает. Так как $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$, то на промежутке $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ функция $f(x)$ убывает.

Так как $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{0{,}1}{x^3}\right) = -\infty$ и $f\left(-\frac{1}{3}\right) > 0$, то на интервале $I_1 = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до положительного числа $f\left(-\frac{1}{3}\right)$. Поскольку функция $f(x)$ еще и непрерывна на интервале I_1, то каждое свое значение она принимает только в одной точке. Следовательно, на интервале I_1 есть единственная точка, в которой эта функция обращается в нуль.

Аналогично показывается, что функция $f(x)$ обращается в нуль в единственной точке на интервале $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ и в единственной точке на интервале $(1; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет три нуля, а это означает, что уравнение (6) имеет три корня.

Ответ. Уравнение имеет три корня.

ПРИМЕР 4. Решим уравнение

$$e^x - 1 - x = 0. \qquad (7)$$

Функция $f(x) = e^x - 1 - x$ имеет производную $f'(x) = e^x - 1$ на интервале $\boldsymbol{R}$. Причем $f'(x) = 0$ только для $x_1 = 0$, $f'(x) < 0$ для каждого $x < 0$ и $f'(x) > 0$ для каждого $x > 0$. Следовательно, функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и точка $x_1 = 0$ — единственная точка минимума этой функции на $\boldsymbol{R}$. Поэтому $f(x) > f(x_1) = 0$ для каждого $x \neq x_1$ и $f(x_1) = 0$ только для $x = x_1$. Следовательно, уравнение (7) имеет единственный корень x_1.

Ответ. 0.

ПРИМЕР 5. Решим уравнение

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} - 2 = 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} - 2$. Область существования этой функции есть отрезок $[2; 4]$. Найдем максимум

и минимум этой функции на отрезке $[2; 4]$. Функция $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} - 2$ на интервале $(2; 4)$ имеет производную $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}$, которая обращается в нуль в единственной точке $x_0 = 3$. Так как функция непрерывна на отрезке $[2; 4]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений. Они находятся среди чисел $f(2) = \sqrt[4]{2} - 2$, $f(3) = 0$, $f(4) = \sqrt[4]{2} - 2$. Так как $f(3) > f(2) = f(4)$, то наибольшее значение 0 на отрезке $[2; 4]$ функция принимает в точке $x_0 = 3$, а наименьшее значение $\sqrt[4]{2} - 2$ на отрезке $[2; 4]$ функция принимает в двух точках: $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Следовательно, функция обращается в нуль в единственной точке x_0. Поэтому уравнение (8) имеет единственный корень x_0.

Ответ. 3.

Решите уравнение **(13.27—13.31)**:

13.27 а) $\log_2 x = 1 - x$; б) $\log_3 x = 4 - x$;
в) $\log_{0,5} x = x - 3$; г) $\log_{0,3} x = x - 1$.

13.28 а) $\sqrt[3]{3x-1} - \sqrt[4]{19-x} = 0$; б) $\sqrt[5]{9x+5} - \sqrt[4]{25-3x} = 0$.

13.29 а) $\sqrt[4]{x^3-7} + \sqrt[3]{x^4-8} = 3$; б) $\sqrt[5]{x^3+5} + \sqrt[3]{x^4-17} = 6$;
в) $\sqrt{x^3+8} + \sqrt{8-x^3} = 4$; г) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} = 2$.

13.30 а) $x^5 + x^3 + 1 - \sqrt{10-x} = 0$; б) $x^5 + x^3 - 37 - \sqrt{25-8x} = 0$.

13.31 а) $x^2 - 1 = 2\ln x$; б) $x^{\frac{3}{2}}(1-x) = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$; в) $x - \frac{x^2}{2} = \ln(x+1)$.

Решите неравенство **(13.32—13.33)**:

13.32 а) $12x^5 + 10x^3 + 35x - 17\sin 2x > 0$;
б) $10x^5 + 25x^3 + 39x + 11 - 11\cos 2x > 0$.

13.33 а) $3x^5 + 10x^3 + 15^x + \lg x - 28 > 0$;
б) $x^5 + x^3 + 10x + \log_2 x - 61 > 0$.

13.34 Сколько действительных корней имеет уравнение:
а) $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$; б) $2x^4 - 8x + 1 = 0$?

13.5* Использование свойств синуса и косинуса

Достаточно много уравнений (и неравенств) можно решить, если использовать ограниченность тригонометрических функций $\sin \alpha x$ и $\cos \beta x$. Для решения таких уравнений (и неравенств) часто применяют способ «рассуждения с числовыми значениями».

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$\sin x \cos 4x = 1. \qquad (1)$$

Если число x_0 – решение уравнения (1), то либо $\sin x_0 = 1$, либо $\sin x_0 = -1$. Действительно, если бы было справедливо числовое неравенство $|\sin x_0| < 1$, то из числового равенства $\sin x_0 \cdot \cos 4x_0 = 1$ следовало бы, что $|\cos 4x_0| > 1$, что, естественно, невозможно. Но если $\sin x_0 = 1$, то $\cos 4x_0 = 1$; если же $\sin x_0 = -1$, то $\cos 4x_0 = -1$. Следовательно, любое решение уравнения (1) является решением совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos 4x = -1. \end{cases} \qquad (3)$$

Легко видеть, что любое решение системы (2) и любое решение системы (3) есть решение уравнения (1).

Следовательно, уравнение (1) равносильно совокупности систем (2) и (3). Решим эти системы.

Первое уравнение системы (2) имеет серию решений $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Все они удовлетворяют второму уравнению системы (2), т. е. являются решениями системы (2).

Первое уравнение системы (3) имеет серию решений $x_m = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Ни одно из этих чисел не удовлетворяет второму уравнению системы (3). Поэтому система (3) не имеет решений.

Итак, все решения уравнения (1) совпадают со всеми решениями системы (2).

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение

$$3\sqrt[8]{\cos 4x} - 2\sqrt[3]{\sin x} = 5. \qquad (4)$$

Если число x_0 — решение уравнения (4), то справедливо числовое равенство

$$2\sqrt[3]{\sin x_0} = 3\sqrt[8]{\cos 4x_0} - 5. \qquad (5)$$

Так как $\cos 4x_0 \leqslant 1$, то из числового равенства (5) следует, что $\sqrt[3]{\sin x_0} \leqslant -1$. Так как $\sin x_0 \geqslant -1$, то из этих двух неравенств следует, что $\sin x_0 = -1$, но тогда $\cos 4x_0 = 1$. Поэтому любое решение уравнения (4) является решением системы

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos 4x = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Легко видеть, что любое решение системы (6) есть решение уравнения (4). Следовательно, уравнение (4) равносильно системе (6). Решим эту систему.

Первое уравнение системы (6) имеет серию решений $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Все они удовлетворяют второму уравнению системы (6), т. е. составляют множество решений системы (6), а значит, и равносильного ей уравнения (4).

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, могут применяться и при решении неравенств.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство

$$\sin^4 2x + 4\cos 8x \geqslant 5. \qquad (7)$$

Если число x_0 — решение неравенства (7), то $\cos 8x_0 = 1$, так как в противном случае было бы справедливо неравенство $|\sin 2x_0| > 1$, что невозможно. Но тогда $|\sin 2x_0| = 1$. Поэтому любое решение неравенства (7) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 1 \\ \cos 8x = 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Легко видеть, что любое решение системы (8) есть решение неравенства (7). Следовательно, неравенство (7) равносильно системе (8). Решим эту систему.

Первое уравнение системы (8) имеет серию решений $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, что все эти x_k удовлетворяют второму уравнению системы (8), так как $\cos 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) = 1$.

Итак, всеми решениями системы (8), а значит, и равносильного ей неравенства (7) являются числа x_k.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решите уравнение (13.35—13.36):

13.35 а) $\sin x \cos 8x = 1$; б) $\sin 6x \cos 4x = -1$;
в) $\sin 3x \cos 12x = 1$; г) $\sin 4x \cos 16x = -1$.

13.36 а) $2\sin^8 2x - 5\cos^7 4x = 7$; б) $5\sin^7 3x + 2\cos^4 2x = 7$;
в) $3\sin^3 2x - 7\cos^4 4x = -10$; г) $7\sin^4 3x + 4\cos^8 2x = 11$.

Решите неравенство (13.37—13.38):

13.37 а) $3\sin^8 2x - 8\cos^7 4x \geqslant 11$; б) $11\sin^7 3x - 2\cos^4 2x \leqslant -13$;
в) $5\sin^7 2x - 9\cos^4 4x \leqslant -14$; г) $13\sin^4 3x + 2\cos^8 2x \geqslant 15$.

13.38 а) $7\sin^3 2x - 10\cos^5 4x + 13\cos^7 8x \geqslant 30$;
б) $3\sin^4 \frac{x}{2} + 11\cos^6 2x + 16\cos^3 4x \geqslant 30$.

§ 14. Системы уравнений с несколькими неизвестными

В этом параграфе рассматриваются системы уравнений с несколькими неизвестными. Ранее рассматривались лишь системы рациональных уравнений, теперь к ним добавятся системы, содержащие корни, степени, логарифмы, тригонометрические функции. Для простоты изложения будем рассматривать в основном системы двух уравнений с двумя неизвестными.

14.1. Равносильность систем

Основные понятия. Напомним основные понятия, необходимые при решении систем уравнений с несколькими неизвестными.

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x;\, y) = g_1(x;\, y) \\ f_2(x;\, y) = g_2(x;\, y) \end{cases}$$

называют такую упорядоченную пару чисел $(x_0;\, y_0)$, при подстановке которой (x_0 вместо x, а y_0 вместо y) в каждое из уравнений системы справедливы числовые равенства

$$f_1(x_0,\, y_0) = g_1(x_0,\, y_0),$$
$$f_2(x_0,\, y_0) = g_2(x_0,\, y_0).$$

Отметим, что справедливость рассматриваемых числовых равенств предполагает, что обе их части определены для указанных значений неизвестных.

Аналогично определяется решение системы n уравнений с n неизвестными ($n \in N$, $n \geqslant 3$).

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений. Заметим, что это множество может быть и пустым. В этом случае говорят, что **система не имеет решений** или что **система несовместна**.

Две системы уравнений называют **равносильными**, если совпадают множества всех их решений. Равносильность систем обозначают знаком $\Leftrightarrow$.

Утверждений о равносильности систем много. Поэтому приведем здесь лишь несколько простейших утверждений о равносильности систем, которыми особенно часто приходится пользоваться.

1. Если уравнения системы поменять местами, то получится система, равносильная исходной.

2. Если в одном из уравнений системы перенести члены уравнения (с противоположными знаками) из одной части уравнения в другую, то получится система, равносильная исходной.

3. Если обе части одного из уравнений системы умножить на не равное нулю число, то получится система, равносильная исходной.

4. Если одно из уравнений системы заменить суммой этого уравнения и какого-либо другого уравнения системы, то получится система, равносильная исходной.

5. Система, равносильная исходной системе, получается также, если в одном из уравнений:

а) привести подобные члены многочлена;

б) применить формулы сокращенного умножения многочленов;

в) применить формулы

$$\sqrt{f^2} = |f|,\ f^2 = |f|^2,\ a^{f+g} = a^f a^g,\ a^{f-g} = \frac{a^f}{a^g},\ (a^f)^g = a^{fg}\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

В дальнейшем при применении этих преобразований часто не будем писать о равносильности систем, а будем писать: «перепишем систему в виде».

Метод подстановки — основной для решения систем уравнений с несколькими неизвестными. Для систем двух уравнений с двумя неизвестными этот метод основывается на утверждении:

6. Если в одном из уравнений системы выразить одно неизвестное через другое и подставить полученное выражение вместо первого неизвестного во второе уравнение, то получится система, равносильная исходной.

При решении систем этим методом с помощью утверждений 1—5 система приводится к виду, где одно из уравнений есть, например, $y = F(x)$ (т. е. в одном из уравнений y выражен через x), после чего применяется утверждение 6 и задача сводится к решению уравнения $f(x, F(x)) = g(x, F(x))$ с одним неизвестным x. Решив это уравнение, т. е. найдя его корни x_i (их может быть и бесконечно много), подставим их в уравнение $y = F(x)$. Тем самым для каждого x_i найдем соответствующее ему значение y_i. Все пары чисел $(x_i; y_i)$ и составят все решения исходной системы уравнений.

Аналогично метод подстановки применяется для решения систем n уравнений с n неизвестными ($n \in N$, $n \geqslant 3$).

Отметим, что ранее этим способом уже решались системы рациональных уравнений.

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{2^y}{5^x} = 200. \end{cases} \quad (1)$$

Выразив x через y из первого уравнения, перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ \dfrac{2^y}{5^x} = 200. \end{cases} \quad (2)$$

Применяя утверждение 6, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ \dfrac{2^y}{5^{1-y}} = 200, \end{cases} \quad (3)$$

равносильную системе (2). Систему (3) можно переписать так:

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 10^y = 1000. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим, что $y = 3$. Подставляя 3 в первое уравнение вместо y, находим, что $x = -2$. Следовательно, система (1) имеет единственное решение $(-2; 3)$.

Ответ. $(-2; 3)$.

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \log_3 x = \log_3 (1 - y). \end{cases}$$

Выразив y через x из первого уравнения системы и подставляя $1 - x$ вместо y во второе уравнение, получаем уравнение $\log_3 x = \log_3 x$. Решениями этого уравнения являются все положительные числа. Каждому такому значению $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$ соответствует значение $y = 1 - \alpha$. Следовательно, решениями исходной системы являются все пары чисел $(\alpha; 1 - \alpha)$, где α — любое положительное число.

Ответ. $(\alpha; 1 - \alpha)$, $\alpha > 0$.

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (4)$$

Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = \dfrac{\pi}{4} - x$. Подставляя $\dfrac{\pi}{4} - x$ вместо y в первое уравнение, получаем уравнение

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5 - 2\sqrt{6}. \quad (5)$$

Так как

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x \cos x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}},$$

то уравнение (5) перепишется в виде

$$\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}=5-2\sqrt{6}. \qquad (6)$$

Уравнение $\dfrac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{z+\frac{\sqrt{2}}{2}}=5-2\sqrt{6}$ имеет единственный корень $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, уравнение (6) равносильно уравнению

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это уравнение имеет две серии решений:

$$x_n=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z;\ x_m=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}+\pi m,\ m\in Z.$$

Теперь находим соответствующие значения y:

$$y_n=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12}-\pi n,\ n\in Z;\ y_m=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}-\pi m,\ m\in Z.$$

Следовательно, все решения системы (4) составляют пары $(x_n;\ y_n)$, $(x_m;\ y_m)$.

Ответ. $\left(\frac{5\pi}{24}+\pi n;\ \frac{\pi}{24}-\pi n\right),\ n\in Z;\ \left(\frac{\pi}{24}+\pi m;\ \frac{5\pi}{24}-\pi m\right),\ m\in Z.$

Линейные преобразования систем. При решении систем уравнений часто помогает метод линейных преобразований систем. Он основан на утверждениях 3 и 4 и заключен в следующем. Одно из уравнений системы заменяют суммой этого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число, и какого-либо другого уравнения системы, умноженного на отличное от нуля число.

Применение этого утверждения иногда позволяет привести систему к такой системе, равносильной исходной, решение которой уже не представляет трудностей.

ПРИМЕР 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3|y| + |x| = 12 \\ y^2 + 3|x| + |y| = 9. \end{cases} \quad (7)$$

Заменяя второе уравнение системы (7) суммой этого уравнения и первого уравнения, умноженного на -1, т. е. вычитая из второго уравнения первое, получаем систему

$$\begin{cases} x^2 - 3|y| + |x| = 12 \\ y^2 - x^2 + 3(|x| + |y|) + |y| - |x| = -3, \end{cases} \quad (8)$$

равносильную системе (7). Так как $y^2 - x^2 = (|y| - |x|)(|y| + |x|)$, то можно переписать второе уравнение системы в виде

$$(|y| - |x| + 3)(|y| + |x| + 1) = 0.$$

Поскольку $|x| + |y| + 1 \neq 0$ для любой пары чисел $(x; y)$, то система (8) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3|y| + |x| = 12 \\ |y| - |x| + 3 = 0. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 3 и складывая его с первым, получим систему, равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - 3 = 0 \\ |y| - |x| + 3 = 0. \end{cases}$$

Корни первого уравнения последней системы: $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$. Подставляя их во второе уравнение последней системы, находим $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Следовательно, решениями исходной системы являются две пары чисел: $(3; 0)$ и $(-3; 0)$.

Ответ. $(3; 0)$, $(-3; 0)$.

14.1° а) Что называют решением системы уравнений?
б) Какие системы уравнений называют равносильными?
в) Какие преобразования уравнений системы приводят к системе, равносильной исходной? Приведите примеры.

14.2 Является ли пара чисел $(1; 2)$ решением системы:

а) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - xy = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x^2 = 6 \\ 2x + y = 4? \end{cases}$

14.3 Среди трех пар чисел $(1; 1)$, $(1; 5)$ и $(5; 1)$ найдите решения системы:

а) $\begin{cases} \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 - y} = x + y \\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 5 \\ xy + x + y = 11. \end{cases}$

Докажите, что система уравнений не имеет действительных решений (14.4—14.5):

14.4 а) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

14.5 а) $\begin{cases} \sqrt{2 - x} + 7 = x + y \\ \log_2(x - 2) + \sqrt{y - 1} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos^2 y = 1 \\ \sin^2 x + \sin y = 2. \end{cases}$

14.6 **Равносильны ли системы:**

а) $\begin{cases} \sin x = \cos y \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \end{cases}$ и $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \\ \sin x = \cos y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = 4y + 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{x-3} + y = \dfrac{1}{8} \\ \sqrt{x} - \sin y = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2^x + 8y = 1 \\ \sqrt{x} = \sin y + 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin^2 x = y \\ \cos^2 x = y^2 + 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sin^2 x = y \\ y^2 + y = 0? \end{cases}$

14.7 **Решите систему уравнений методом подстановки:**

а) $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2^x = 24 \cdot 3^y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

14.8 **Решите систему уравнений, используя сложение уравнений:**

а) $\begin{cases} \sin^2 x + \sqrt{y - 2} = 2 \\ \cos^2 x + \sqrt{y - 2} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3(x - 2) + \sqrt{y + 1} = 2 \\ \log_3(x - 2) - \sqrt{y + 1} = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \cos x + \cos y = 1 \\ \sin x \cos x - \cos y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x \cos x - \sqrt{y} = 1 \\ \sin y \cos x + \sqrt{y} = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sin^2(2\cos x) + y^2 = 5 \\ \cos^2(2\cos x) + 2y = 4. \end{cases}$

Решите систему уравнений (14.9—14.17):

14.9 а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0 \\ y^2 + 2x + 8y + 10 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0 \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0 \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0. \end{cases}$

14.10 а) $\begin{cases} 3^y + x = 10 \\ y - \log_3 x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x + y = 5 \\ x - \log_2 y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2^x = 12 \\ \log_2 y - x = 2. \end{cases}$

14.11 а) $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 2\log_4 x - \log_4 (2y - 1) = 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 19 \\ \log_9 (2x - 1) - \log_9 y = -0{,}5. \end{cases}$

14.12 а) $\begin{cases} y + x^2 = 3 \\ 1 + 2\log_3 (x + 1) = \log_3 y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y^2 = 3 \\ 2\log_2 (y + 1) = 2 + \log_2 x. \end{cases}$

14.13 а) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = 1. \end{cases}$

14.14 а) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x - 5y = -5 \\ x^2 + y^2 + 2x - 10y = -9. \end{cases}$

14.15* а) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y = -6 \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3 \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

14.16* а) $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\dfrac{1}{6} \\ x - y = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{4} \\ x + y = \dfrac{5\pi}{12}. \end{cases}$

14.17* $\begin{cases} x + \log_2 y = y\log_2 3 + \log_2 x \\ x\log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

14.2. Система-следствие

Основные понятия. Систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1 (x; y) = h_1 (x; y) \\ \varphi_2 (x; y) = h_2 (x; y) \end{cases} \qquad (1)$$

называют **следствием** системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 (x; y) = g_1 (x; y) \\ f_2 (x; y) = g_2 (x; y), \end{cases} \qquad (2)$$

если каждое решение системы (2) является решением системы (1).

Справедливо следующее утверждение:

7. К системе-следствию приводят следующие преобразования:
а) замена в уравнении системы разности $f(x; y) - f(x; y)$ нулем (т. е. приведение подобных членов);
б) возведение одного из уравнений в четную степень;
в) освобождение от знаменателя в одном из уравнений системы;
г) потенцирование хотя бы одного уравнения системы.

Замечание. Отметим, что применение некоторых формул также может привести к системе-следствию. Например, к следствиям приводят замены:

$\sqrt{f} \cdot \sqrt{g}$ на $\sqrt{f \cdot g}$, $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$ на $\sqrt{\frac{f}{g}}$, $\sqrt{f \cdot g}$ на $\sqrt{|f|} \cdot \sqrt{|g|}$, $\sqrt{\frac{f}{g}}$ на $\frac{\sqrt{|f|}}{\sqrt{|g|}}$, $(\sqrt[2n]{f})^{2n}$ на f, $\log_a f + \log_a g$ на $\log_a (f \cdot g)$, $2\log_a f$ на $\log_a f^2$, $a^{\log_a f}$ на f, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Если в процессе решения системы уравнений выполнялись только указанные выше преобразования, то все решения исходной системы уравнений содержатся среди решений последней в цепочке преобразований системы. Чтобы отобрать решения исходной системы, нужно определить, какие из найденных пар чисел удовлетворяют ей. Поэтому **проверка полученных решений обязательна** при таком методе решения систем уравнений.

Приведение подобных.

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 + 2\sqrt{x} - x = y^2 - 1 + 2(1 + \sqrt{x}). \end{cases} \qquad (3)$$

Эта система на основании утверждений 2 и 6 равносильна системе

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 + 2\sqrt{x} - x = (1 - x)^2 - 1 + 2(1 + \sqrt{x}). \end{cases}$$

Перенеся во втором уравнении все члены в левую часть и приведя подобные члены, получим систему

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$$

являющуюся по утверждению 7а следствием системы (3).

Решением последней системы являются две пары чисел: (1; 0) и (–2; 3). Проверка показывает, что пара (1; 0) является решением системы (3), а пара (–2; 3) не является решением системы (3).

Ответ. (1; 0).

Возведение в четную степень.

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{y-x+2} = 2x-2. \end{cases} \quad (4)$$

Возведя обе части каждого уравнения в квадрат, получим систему

$$\begin{cases} x+y-1 = 1 \\ y-x+2 = 4x^2-8x+4, \end{cases} \quad (5)$$

являющуюся на основании утверждения 7б следствием исходной системы (4).

Решениями системы (5) являются пары чисел (0; 2) и $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Проверка показывает, что системе (4) удовлетворяет только пара $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Освобождение от знаменателей.

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 2 \\ \dfrac{x^3-y^2}{xy} = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Перейдем от системы (6) к системе

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2xy \\ x^3-y^2 = xy, \end{cases} \quad (7)$$

которая является по утверждению 7в следствием исходной системы. Поскольку $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2$, то система (7) равносильна системе

$$\begin{cases} x = y \\ x^3-y^2 = xy. \end{cases} \quad (8)$$

Решениями системы (8) являются пары чисел (0; 0) и (2; 2). Проверка показывает, что из них системе (6) удовлетворяет только пара (2; 2).

Ответ. (2; 2).

Потенцирование.

ПРИМЕР 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 xy = \log_3 \dfrac{x}{y} \\ x^3y^2+y^4 = 2. \end{cases} \quad (9)$$

Потенцируя первое уравнение системы (9), получим систему уравнений

$$\begin{cases} xy = \dfrac{x}{y} \\ x^3y^2 + y^4 = 2, \end{cases} \tag{10}$$

являющуюся следствием системы (9) по утверждению 7г. Система уравнений

$$\begin{cases} xy^2 = x \\ x^3y^2 + y^4 = 2 \end{cases} \tag{11}$$

является по утверждению 7в следствием системы (10). Множество всех решений системы (11) есть объединение всех решений двух систем:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3y^2 + y^4 = 2 \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x^3y^2 + y^4 = 2. \end{cases} \tag{13}$$

Решениями системы (12) являются пары чисел $(0; \sqrt[4]{2})$ и $(0; -\sqrt[4]{2})$. Решениями системы (13) являются пары чисел (1; 1) и (1; –1). Проверка показывает, что исходной системе удовлетворяет только пара (1; 1).

Ответ. (1; 1).

Применение формул.

ПРИМЕР 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\log_2 xy} = x^2y - 2 \\ 3x^2y^2 = x^2y + 2. \end{cases} \tag{14}$$

Применяя формулу $2^{\log_2 a} = a$, получим систему

$$\begin{cases} xy = x^2y - 2 \\ 3x^2y^2 = x^2y + 2, \end{cases} \tag{15}$$

являющуюся (см. замечание) следствием системы (14). Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем систему

$$\begin{cases} xy = x^2y - 2 \\ 3x^2y^2 - xy - 4 = 0, \end{cases} \tag{16}$$

которая равносильна системе (15). Поскольку $3x^2y^2 - xy - 4 = (3xy - 4)(xy + 1)$, то множество всех решений системы (16) есть объединение множеств всех решений двух систем:

$$\begin{cases} 3xy - 4 = 0 \\ xy = x^2y - 2 \end{cases} \tag{17}$$

и

$$\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ xy = x^2y - 2. \end{cases} \qquad (18)$$

Решением системы (17) является пара чисел $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{15}\right)$. Решением системы (18) является пара чисел $(-1; 1)$. Проверка показывает, что пара $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{15}\right)$ является решением исходной системы, а пара $(-1; 1)$ — нет.

Ответ. $\left(\frac{5}{2}; \frac{8}{15}\right)$.

ПРИМЕР 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = (x - 5)\sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} \\ y^2 + x^2 - 1 = 2xy. \end{cases} \qquad (19)$$

Используя формулы

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{|x - y|} \cdot \sqrt{|x + y|} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{x + y}{x - y}} = \frac{\sqrt{|x + y|}}{\sqrt{|x - y|}},$$

перейдем от системы (19) к системе

$$\begin{cases} \sqrt{|x + y|}\left(\sqrt{|x - y|} - \dfrac{x - 5}{\sqrt{|x - y|}}\right) = 0 \\ (x - y)^2 = 1, \end{cases} \qquad (20)$$

являющейся следствием системы (19). Перепишем систему (20) в виде

$$\begin{cases} \sqrt{|x + y|}\left(\sqrt{|x - y|} - \dfrac{x - 5}{\sqrt{|x - y|}}\right) = 0 \\ |x - y| = 1. \end{cases} \qquad (21)$$

Подставляя 1 вместо $|x - y|$ в первое уравнение системы (21), получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{|x + y|}\,(x - 6) = 0 \\ |x - y| = 1, \end{cases} \qquad (22)$$

равносильную системе (21). Множество всех решений системы (22) есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \sqrt{|x+y|} = 0 \\ |x-y| = 1 \end{cases} \qquad (23)$$

и

$$\begin{cases} x - 6 = 0 \\ |x-y| = 1, \end{cases} \qquad (24)$$

так как все функции в системах (23) и (24) определены при всех x и y. Решая каждую из этих систем, получаем решения системы (20): (6; 5), (6; 7), $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Проверка показывает, что из этих пар чисел системе (19) удовлетворяют только пары (6; 5), $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. (6; 5), $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. ●

14.18 а) Объясните, какие преобразования уравнений системы приводят к системе-следствию.
б) Почему после перехода к системе-следствию необходима проверка всех решений, полученных при решении системы-следствия?

14.19 Является ли вторая система следствием первой системы:

а) $\begin{cases} x^2 + 2y + \lg x = 5 + \lg x \\ x + y = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + 2y = 5 \\ x + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+1} = y - x \\ 2xy - y^2 = 55 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 1 = y^2 - 2xy + x^2 \\ 2xy - y^2 = 55; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{y} + \dfrac{\sqrt{y}}{x} = \dfrac{35}{36} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = y - x \end{cases}$ и $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = \dfrac{35}{36}xy \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = y - x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_2(x+2y) = \log_2(2x+y) \\ x^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y = 2x + y \\ x^2 - y - 2 = 0; \end{cases}$

д)* $\begin{cases} \log_7(x+y) + \log_7(x-y) = 1 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$ и $\begin{cases} \log_7((x+y)(x-y)) = 1 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{12}? \end{cases}$

Решите систему уравнений (14.20—14.26):

14.20 а) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x^2-4\sqrt{x}+x=y^2+13+(2-\sqrt{x})^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x^2-6\sqrt{x}+x=y^2+2+(3-\sqrt{x})^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=4 \\ \lg(3x+y)+2x^2+7=(y-2)^2+\lg(3x+y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=5 \\ \sqrt{x+3y}+x^2-40=(2y+1)^2+\sqrt{x+3y}. \end{cases}$

14.21 а) $\begin{cases} \sqrt{x-y+3}=2 \\ \sqrt{y-x+10}=y+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{2x-3y}=1 \\ \sqrt{2y-3x+10}=y-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x+y+4}=x-y \\ \sqrt{2x+y}=\sqrt{3x-3y}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x+y+4}=y-x \\ \sqrt{x+y}=\sqrt{2x-3y}. \end{cases}$

14.22* а) $\begin{cases} \sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5 \\ \sqrt{y+2x}-y+x=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{y+x}=6 \\ \sqrt{y+x}-y+x=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{2y-x}+x+y=3 \\ \sqrt{5y-x}+x=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{3y-x}+x+y=2 \\ \sqrt{8y-x}+x=2. \end{cases}$

14.23 а) $\begin{cases} \log_3 xy=\log_3 \dfrac{x}{y} \\ x^2-3xy=y^2-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4 xy=\log_4 \dfrac{x}{y} \\ x^2-3y=y^2-3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5 x^2y=\log_5 \dfrac{y}{x^2} \\ x^2+xy=y^2-19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_6 xy^3=\log_6 \dfrac{x}{y} \\ 4x^2-1=2xy+y^2. \end{cases}$

14.24* а) $\begin{cases} 3^{\log_3(x-y)}=1 \\ \log_3(2x-y)+\log_3 y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{\log_2(x-y)}=1 \\ \log_2(2x-y)+\log_2 y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{1+\log_2(x-2y)}=x \\ 3^{x^2-6y}=9^y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{x^2+xy}=1 \\ 2\log_2 y=\log_2(x+6). \end{cases}$

14.25* а) $\begin{cases} 2^{1+\log_2(x+y)}=24 \\ 2\log_{0,5} y-\log_{0,5} x=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,2^{1+\log_{0,2}(y-x)}=0,8 \\ \log_2 y-2\log_2 x=-1. \end{cases}$

14.26* а) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x-2y)} = 9 \\ \log_3(x-2y) + \log_3(x+2y) = 1 + 2\log_3 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(2x+y)} = 25 \\ \log_5(2x-y) + \log_5(2x+y) = 1 + 2\log_5 3. \end{cases}$

14.3. Метод замены неизвестных

В некоторых случаях с введением новых неизвестных система сводится к системе, которую можно решить изложенными выше методами. Метод замены неизвестных основан на следующем утверждении, которое мы приведем только для систем двух уравнений с двумя неизвестными.

8. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} f(\alpha(x; y), \beta(x; y)) = 0 \\ g(\alpha(x; y), \beta(x; y)) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и пусть система

$$\begin{cases} f(u; v) = 0 \\ g(u; v) = 0 \end{cases}$$

имеет k различных решений: $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_2)$, ..., $(u_k; v_k)$. Тогда множество решений системы (1) есть объединение всех решений каждой из k систем:

$$\begin{cases} \alpha(x; y) = u_1 \\ \beta(x; y) = v_1, \end{cases} \begin{cases} \alpha(x; y) = u_2 \\ \beta(x; y) = v_2, \end{cases} \ldots, \begin{cases} \alpha(x; y) = u_k \\ \beta(x; y) = v_k. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[4]{x+y} = \log_3 9x \\ 2\sqrt[4]{x+y} = \log_3 \dfrac{27}{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Сделаем замену неизвестных: $u = \sqrt[4]{x+y}$, $v = \log_3 x$. Так как $\log_3 9x = 2 + \log_3 x$, $\log_3 \dfrac{27}{x} = 3 - \log_3 x$, то получим систему

$$\begin{cases} 3u = 2 + v \\ 2u = 3 - v. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = 1$, $v = 1$. Поэтому на основании утверждения 8 система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \sqrt[4]{x+y} = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3), а значит, и система (2) имеют по единственному решению (3; –2).

Ответ. (3; –2).

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7. \end{cases} \quad (4)$$

Сделав замену неизвестных: $u = 3^{\frac{x}{2}}$, $v = 2^{\frac{y^2}{2}}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 77 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)(u + v) = 77 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u - v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 2. \end{cases}$$

По утверждению 8 система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} = 9 \\ 2^{\frac{y^2}{2}} = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5), а значит, и система (4) имеют по два решения: $(4; \sqrt{2})$ и $(4; -\sqrt{2})$.

Ответ. $(4; \sqrt{2})$; $(4; -\sqrt{2})$.

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x = y^2 - y \\ y^4 - 2y^3 + y = x^2 - x. \end{cases} \quad (6)$$

Сделав замену неизвестных: $u = y^2 - y$, $v = x^2 - x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} v^2 - v = u \\ u^2 - u = v. \end{cases} \quad (7)$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим систему

$$\begin{cases} v^2 - v = u \\ u^2 - v^2 = 0, \end{cases}$$

равносильную системе (7). Из второго уравнения следует, что либо $v = u$, либо $v = -u$. Следовательно, множество всех решений системы (7) есть объединение множеств решений двух систем:

$$\begin{cases} v^2 - v = v \\ v = u \end{cases} \text{ и } \begin{cases} v^2 - v = -v \\ v = -u. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 2$, а вторая — одно решение: $u_3 = 0$, $v_3 = 0$. Это означает, что

система (7) имеет два решения: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 2$. Для отыскания всех решений системы (6) надо объединить все решения двух систем

$$\begin{cases} y^2 - y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y^2 - y = 2 \\ x^2 - x = 2. \end{cases}$$

Это будут пары $(-1; -1)$, $(-1; 2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(2; -1)$, $(2; 2)$.

Ответ. $(-1; -1)$, $(-1; 2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(2; -1)$, $(2; 2)$.

ПРИМЕР 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим $\cos x$ через u, а $\sin y$ через v. Тогда

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2u^2 - 1, \ \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - v^2,$$

и систему (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 4v^2 + 4v - 6\sqrt{2}u - 9 = 0 \\ 2u^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из второго уравнения этой системы находим $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подставляя $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ в первое уравнение системы (9), получаем уравнение $4v^2 + 4v - 15 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $v_1 = \frac{3}{2}$, $v_2 = -\frac{5}{2}$. Это значит, что пары чисел $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{5}{2}\right)$ являются решениями системы (9).

Подставляя $u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ в первое уравнение, получаем уравнение $4v^2 + 4v - 3 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $v_3 = \frac{1}{2}$, $v_4 = -\frac{3}{2}$. Значит, система (9) имеет еще два решения: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{2}\right)$.

Множество решений системы (8) есть объединение множеств решений следующих четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = -\frac{5}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Так как числа $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$ не принадлежат области значений функции $\sin y$, то первая, вторая и четвертая из этих систем уравнений не имеют решений. Следовательно, множество решений системы уравнений (8) совпадает с множеством решений третьей системы, откуда следует, что система (8) имеет решения $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $y = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$.

Ответ. $\left(\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m\right)$, $n \in Z$; $m \in Z$.

Решите систему уравнений **(14.27—14.37)**:

14.27 а) $\begin{cases} |x+1| + |y+1| = 5 \\ |x+1| = 4y + 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x+1|. \end{cases}$

14.28 а) $\begin{cases} xy + x - y = 13 \\ xy - x + y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 23 \\ x^2 y = 50; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy^2 = 12 \\ x + y^2 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

14.29 а) $\begin{cases} \frac{5}{3x-2y} + \frac{4}{7x-3y} = -1 \\ \frac{4}{3x-2y} - \frac{3}{7x-3y} = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18}. \end{cases}$

14.30 а) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3 \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{5x-6} + \sqrt{y+6} = 5 \\ 5xy - 6y + 30x = 72. \end{cases}$

14.31 а) $\begin{cases} \frac{15}{\sqrt{x+8}} + \frac{2}{\sqrt{5y+1}} = \frac{10}{3} \\ \frac{10}{\sqrt{x+8}} + \frac{6}{\sqrt{5y+1}} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{4y+1}} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{4y+1}} = 3. \end{cases}$

14.32 а) $\begin{cases} 4^{2y} + 3^{2x} = 82 \\ 3^x - 4^y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^y + 5^{2x} = 26 \\ 5^x - 3^{0,5y} = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \\ 3^{2x} - 2^y = 23. \end{cases}$

14.33 а) $\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}\operatorname{ctg} x = 4 \\ \sqrt{8}y - \sqrt{27}\operatorname{ctg} x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{12}\operatorname{tg} y = 9 \\ \sqrt{27}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} y = 8. \end{cases}$

14.34* а) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{x-2y}{xy} = \dfrac{14}{15} \\ \dfrac{xy}{x-2y} + \dfrac{x+2y}{xy} = \dfrac{14}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{xy} = 2 \\ \dfrac{xy}{x-2y} + \dfrac{x-2y}{xy} = 4. \end{cases}$

14.35* а) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[6]{(x+y)^3 (x-y)^2} = 8 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6. \end{cases}$

14.36* а) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2 y + y^2 x = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} = 3 - \sqrt[3]{y^2}. \end{cases}$

14.37* $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 8 \\ \sqrt[4]{x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3} = 12. \end{cases}$

14.4*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений

При решении систем уравнений с несколькими неизвестными часто бывает трудно следить за равносильностью преобразований уравнений системы. В таких случаях помогают рассуждения с числовыми значениями. При этом иногда используют такие же свойства (неотрицательность, ограниченность и т. п.), как и при решении уравнений с одним неизвестным методами с использованием свойств функций.

ПРИМЕР 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (1), т. е. пусть справедливы числовые равенства

$$x_0^2 y_0^2 - 2x_0 + y_0^2 = 0 \qquad (2)$$

и

$$2x_0^2 - 4x_0 + 3 + y_0^3 = 0. \qquad (3)$$

Запишем равенство (2) в виде

$$y_0^2 = \frac{2x_0}{1 + x_0^2}. \qquad (4)$$

Из справедливости неравенства $(1 - x_0)^2 \geqslant 0$ следует справедливость неравенства $\dfrac{2x_0}{1 + x_0^2} \leqslant 1$. Учитывая это неравенство, из равенства (4) заключаем, что $y_0^2 \leqslant 1$, т. е. что $|y_0| \leqslant 1$.

Запишем теперь равенство (3) в виде

$$2(x_0 - 1)^2 + 1 + y_0^3 = 0. \qquad (5)$$

Так как $|y_0| \leqslant 1$, то $1 + y_0^3 \geqslant 1 - |y_0|^3 \geqslant 0$. Теперь очевидно, что левая часть равенства (5) есть сумма двух неотрицательных чисел $2(x_0 - 1)^2$ и $1 + y_0^3$, но их сумма равна нулю лишь тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, т. е. для $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$.

Итак, показано, что если система (1) имеет решения, то это может быть только пара чисел $(1; -1)$. Проверкой легко установить, что эта пара чисел обращает каждое из уравнений системы (1) в верное равенство. Следовательно, система (1) имеет единственное решение $(1; -1)$.

Ответ. $(1; -1)$.

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ есть решение системы (6), т. е. пусть справедливы числовые равенства

$$\begin{aligned} y_0^3 &= 9x_0^2 - 27x_0 + 27, \\ z_0^3 &= 9y_0^2 - 27y_0 + 27, \\ x_0^3 &= 9z_0^2 - 27z_0 + 27. \end{aligned} \qquad (7)$$

Поскольку $t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ для любого числа t, то из равенств (7) следует, что $y_0^3 > 0$, $z_0^3 > 0$, $x_0^3 > 0$, т. е. что $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, $x_0 > 0$. Складывая равенства (7), получим, что справедливо равенство

$$(x_0 - 3)^3 + (y_0 - 3)^3 + (z_0 - 3)^3 = 0. \qquad (8)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $x_0 \geqslant 3$. Тогда из последнего равенства (7) получим, что $z_0^2 - 3z_0 \geqslant 0$, откуда, учитывая, что $z_0 > 0$, получим, что $z_0 \geqslant 3$. Теперь из второго равенства (7), рассуждая аналогично, получим, что $y_0 \geqslant 3$.

Итак, в рассматриваемом случае $x_0 \geqslant 3$, $y_0 \geqslant 3$, $z_0 \geqslant 3$.

Таким образом, левая часть равенства (8) есть сумма трех неотрицательных чисел, поэтому равенство (8) возможно лишь тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, т. е. лишь для $x_0 = y_0 = z_0 = 3$.

Если же $x_0 < 3$, то, рассуждая, как выше, получим, что $y_0 < 3$ и $z_0 < 3$. Но тогда в равенстве (8) слева сумма трех отрицательных чисел, а справа нуль, что невозможно.

Итак, если система (6) имеет решение $(x_0; y_0; z_0)$, то это может быть только в случае $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Проверка показывает, что эта

тройка чисел обращает каждое уравнение системы в верное равенство. Следовательно, система (6) имеет единственное решение (3; 3; 3).

Ответ. (3; 3; 3).

ПРИМЕР 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y + z = (3 - x)^3 \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y \\ x^2 + (\sqrt{z})^4 = 4x. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ есть решение системы (9), т. е. пусть справедливы числовые равенства

$$y_0 + z_0 = (3 - x_0)^3,\ (2z_0 - y_0)(y_0 + 2) = 9 + 4y_0,\ x_0^2 + (\sqrt{z_0})^4 = 4x_0. \quad (10)$$

Перепишем третье из равенств (10) в виде

$$(x_0 - 2)^2 = 4 - (\sqrt{z_0})^4, \quad (11)$$

откуда следует, что

$$z_0 \geqslant 0 \text{ и } 4 - z_0^2 \geqslant 0. \quad (12)$$

Перепишем второе из равенств (10) в виде

$$(y_0 - z_0 + 3)^2 = z_0^2 - 2z_0, \quad (13)$$

откуда следует, что

$$z_0^2 - 2z_0 \geqslant 0. \quad (14)$$

Неравенствам (12) и (14) удовлетворяют только два числа: $z_0 = 0$ и $z_0 = 2$. Если $z_0 = 2$, то из равенств (11) и (13) найдем, что $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Если $z_0 = 0$, то из равенства (13) найдем, что $y_0 = -3$, а из равенства (11), что $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$.

Итак, если система (9) имеет решения, то они содержатся только среди трех троек чисел: (2; –1; 2), (4; –3; 0), (0; –3; 0). Проверка показывает, что первая и вторая тройки чисел обращают каждое уравнение системы (9) в верное равенство, а последняя тройка чисел не удовлетворяет уже первому уравнению системы (9). Следовательно, система (9) имеет два решения: (2; –1; 2), (4; –3; 0).

Ответ. (2; –1; 2), (4; –3; 0).

Отметим, что рассуждения с числовыми значениями позволяют перейти от данной системы к более простой, являющейся ее следствием.

ПРИМЕР 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (1 + 2\log_{xy} 2) \cdot \log_{x+y} xy = 1 \\ x - y = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (15), т. е. пусть справедливы числовые равенства

$$(1 + 2\log_{x_0y_0} 2) \cdot \log_{x_0+y_0} x_0y_0 = 1, \quad (16)$$

$$x_0 - y_0 = 1. \quad (17)$$

Из справедливости равенства (16) следует, что имеют смысл выражения $\log_{x_0y_0} 2$ и $\log_{x_0+y_0} x_0y_0$, но тогда числа x_0 и y_0 удовлетворяют условиям $x_0y_0 > 0$, $x_0y_0 \neq 1$, $x_0 + y_0 > 0$, $x_0 + y_0 \neq 1$.

Для таких чисел x_0 и y_0 справедливо равенство

$$\log_{x_0+y_0} x_0y_0 = \frac{1}{\log_{x_0y_0}(x_0 + y_0)},$$

и поэтому равенство (16) можно переписать в виде

$$\log_{x_0y_0} 4x_0y_0 = \log_{x_0y_0}(x_0 + y_0),$$

откуда следует, что

$$4x_0y_0 = x_0 + y_0. \quad (18)$$

Из равенств (17) и (18) следует, что каждое решение системы уравнений (15) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4xy = x + y \\ x - y = 1, \end{cases} \quad (19)$$

т. е. система (19) является следствием системы (15).

Система (19) имеет два решения $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, где

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4},\ y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4},\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Следовательно, все решения системы (15), если они есть, содержатся среди этих пар чисел. Так как $x_2 + y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, то пара чисел $(x_2; y_2)$ не удовлетворяет первому уравнению системы (15). Проверка показывает, что пара чисел $(x_1; y_1)$ удовлетворяет каждому уравнению системы (15). Следовательно, система (15) имеет единственное решение $(x_1; y_1)$.

Ответ. $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)$.

ПРИМЕР 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1 + \frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}(\log_x y)^2 + 1} \\ 1 + \log_x\left(-x + \frac{3y}{x}\right) = \log_x 2. \end{cases} \quad (20)$$

Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (20), т. е. пусть справедливы числовые равенства

$$y_0^{1+\frac{2}{5}\log_{x_0} y_0} = x_0^{\frac{2}{5}(\log_{x_0} y_0)^2+1}, \tag{21}$$

$$1+\log_{x_0}\left(-x_0+\frac{3y_0}{x_0}\right)=\log_{x_0} 2. \tag{22}$$

Так как мы предположили, что имеют смысл выражения $\log_{x_0} y_0$ и $\log_{x_0}\left(-x_0+\frac{3y_0}{x_0}\right)$, то это означает, что

$$x_0>0,\ y_0>0,\ x_0\neq 1,\ 3y_0>x_0^2. \tag{23}$$

Но при условиях (23) для чисел x_0 и y_0 равенства (21) и (22) можно записать в виде

$$x_0^{\log_{x_0} y_0\,(1+\frac{2}{5}\log_{x_0} y_0)} = x_0^{\frac{2}{5}(\log_{x_0} y_0)^2+1}, \tag{24}$$

$$\log_{x_0}(-x_0^2+3y_0)=\log_{x_0} 2. \tag{25}$$

Так как число $x_0>0$ и $x_0\neq 1$, то из равенств (24) и (25) следует справедливость равенств

$$\log_{x_0} y_0 = 1, \tag{26}$$

$$-x_0^2+3y_0=2. \tag{27}$$

Из справедливости равенства (26) следует справедливость равенства

$$x_0=y_0. \tag{28}$$

Из равенств (28) и (27) следует, что каждое решение системы уравнений (20) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x=y \\ -x^2+3y=2, \end{cases} \tag{29}$$

т. е. система (29) является следствием системы (20). Система (29) имеет два решения (x_1, y_1), $(x_2; y_2)$, где $x_1=y_1=2$ и $x_2=y_2=1$.

Следовательно, все решения системы (20), если они есть, содержатся среди этих пар чисел. Так как $x_2=1$, то пара чисел (1; 1) не удовлетворяет ни одному из уравнений системы (20). Проверка показывает, что пара чисел (2; 2) удовлетворяет каждому уравнению системы (20). Следовательно, система (20) имеет единственное решение (2; 2).

Ответ. (2; 2).

Иногда бывают системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. В таких случаях обычно структура уравнения скрывает какие-либо дополнительные ограничения на неизвестные, которые и позволяют решить эту систему уравнений.

ПРИМЕР 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0 \\ z=x+y. \end{cases} \qquad (30)$$

Пусть тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ есть решение системы (30), т. е. пусть справедливы равенства

$$8\cos x_0\cos y_0\cos(x_0-y_0)+1=0,\ z_0=x_0+y_0. \qquad (31)$$

Применяя формулу $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, получим, что тогда справедливы и равенства

$$\begin{gathered} 8\cos x_0\cos y_0\cos(x_0-y_0)+1= \\ =4\cos^2(x_0-y_0)+4\cos(x_0-y_0)\cos(x_0+y_0)+1= \\ =(2\cos(x_0-y_0)+\cos(x_0+y_0))^2+(1-\cos^2(x_0+y_0))= \\ =(2\cos(x_0-y_0)+\cos(x_0+y_0))^2+\sin^2(x_0+y_0). \end{gathered}$$

Поэтому равенства (31) можно переписать в виде

$$(2\cos(x_0-y_0)+\cos(x_0+y_0))^2+\sin^2(x_0+y_0)=0,\ z_0=x_0+y_0,$$

откуда следует, что рассматриваемая тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ одновременно удовлетворяет равенствам

$$2\cos(x_0-y_0)+\cos(x_0+y_0)=0, \qquad (32)$$

$$\sin^2(x_0+y_0)=0, \qquad (33)$$

$$z_0=x_0+y_0. \qquad (34)$$

Из равенства (33) получаем, что числа x_0 и y_0 удовлетворяют условию $x_0+y_0=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. Но тогда, подставляя

$$y_0=\pi k-x_0,\ k\in\boldsymbol{Z} \qquad (35)$$

в левую часть равенства (32), получим, что она равна

$$2\cos(2x_0-k\pi)+\cos k\pi=(-1)^k(2\cos 2x_0+1).$$

Поэтому равенство (32) означает, что $\cos 2x_0=-\frac{1}{2}$, т. е. что $x_0=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Подставляя эти значения x_0 в равенство (35), а затем в равенство (34), получим, что любое решение системы уравнений (30) содержится среди троек чисел

$$x_0=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ y_0=-\frac{\pi}{3}+\pi(k-n),\ z_0=\pi k,\ n\in\boldsymbol{Z},\ k\in\boldsymbol{Z};$$

или

$$x_0=-\frac{\pi}{3}+\pi m,\ y_0=\frac{\pi}{3}+\pi(k-m),\ z_0=\pi k,\ m\in\boldsymbol{Z},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Проверка показывает, что все эти тройки чисел удовлетворяют системе уравнений (30). Следовательно, все они являются ее решениями.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi(k-n);\ \pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi m;\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-m);\ \pi k\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Решите систему уравнений **(14.38—14.45)**:

14.38 а) $\begin{cases}2x^2+1=y-|\sin x|\\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2\\ x^2+y^2=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^5+y^5=1.\end{cases}$

14.39 а) $\begin{cases}y^3-6x^2+12x-8=0\\ z^3-6y^2+12y-8=0\\ x^3-6z^2+12z-8=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3)^3=3-2y\\ (\sqrt{z})^4+4y^2=8y\\ (2z-x)(x+3)=5x+16.\end{cases}$

14.40 а) $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185\\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x^2+xy+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}=145\\ (2x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=230;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(3x^2+2xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=6\sqrt{2}\\ (x^2-2xy+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2};\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+y^2}=221\\ (x-y)\sqrt{x^2+y^2}=91.\end{cases}$

14.41 $\begin{cases}x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2\\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0.\end{cases}$

14.42 а) $\begin{cases}2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6\\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_{1+x}(y^2-2y+1)+\log_{1-y}(x^2+2x+1)=4\\ \log_{1+x}(2y+1)+\log_{1-y}(2x+1)=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2\log_{3+x}(xy+x+3y+3)+\log_{1+y}(x^2+6x+9)=6\\ \log_{3+x}(0{,}5-y)+\log_{1+y}(3x+8)=1.\end{cases}$

14.43 $\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}} \\ 1+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x}\right) = \log_x 4. \end{cases}$

14.44 а) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\lg x}} + \sqrt[4]{y} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{y}}{\lg x}} - z^2 = 1. \end{cases}$

14.45 $\begin{cases} \dfrac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\dfrac{x-y}{2} + \sin^2\dfrac{x-y}{2} \\ z^2+2x^2-2z-1 = 4(x-1). \end{cases}$

§ 15*. Уравнения, неравенства и системы с параметрами

Задачи с параметрами нередки в школьном курсе математики. Так, например, задача решить (относительно x) квадратное уравнение общего вида $ax^2+bx+c=0$ является примером задачи с тремя **параметрами** a, b и c. В этом случае говорят, что надо решить **уравнение с параметрами a, b и c.**

Задача решить (относительно x) линейное неравенство общего вида $ax+b>0$ является примером задачи с двумя параметрами a и b. В этом случае говорят, что надо решить **неравенство с параметрами a и b.**

Задача решить (относительно x и y) систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=a \end{cases}$$

является примером задачи с одним параметром a. В этом случае говорят, что надо решить **систему уравнений с параметром a.**

В данном параграфе рассматриваются уравнения, неравенства и системы с одним параметром.

15.1*. Уравнения с параметром

Решить уравнение с параметром — значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения (это множество может быть и пустым).

Основной принцип решения уравнения с параметром можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра на каждом

из них получающиеся уравнения можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра. Используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений с числовыми коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться, с тем чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения. Сложность задач с параметром заключается в том, что, как правило, вместе с изменением параметра меняются не только коэффициенты, но и ряд других характеристик, связанных с параметром. Обычно это приводит к тому, что при разных значениях параметра приходится использовать различные методы решения.

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$(a+1)x = a^2 - 1. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая: $a = -1$ и $a \neq -1$.

Пусть $a = -1$, тогда уравнение (1) имеет вид $0 \cdot x = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое действительное число.

Пусть $a \neq -1$, тогда уравнение (1) является уравнением первой степени и его единственное решение, так как $a + 1 \neq 0$, есть $x_0 = a - 1$.

Ответ. Для $a = -1$ любое число есть корень; для каждого $a \neq -1$ единственный корень: $x_0 = a - 1$.

ПРИМЕР 2. Решим уравнение с параметром a

$$\frac{x+1}{x^2+1} = a. \tag{2}$$

Многочлен $x^2 + 1$ положителен при любом x. Поэтому для каждого значения параметра a уравнение (2) равносильно уравнению $x + 1 = a(x^2 + 1)$, или уравнению

$$ax^2 - x + a - 1 = 0. \tag{3}$$

Если $a = 0$, то уравнение (3) становится линейным: $-x - 1 = 0$ — и имеет единственный корень $x_0 = -1$.

При $a \neq 0$ уравнение (3) есть квадратное уравнение, и в зависимости от знака дискриминанта $D = 1 + 4a - 4a^2$ оно имеет решения или не имеет их. Для всех значений a, удовлетворяющих неравенству

$$D = 1 + 4a - 4a^2 < 0, \tag{4}$$

уравнение (3) решений не имеет. Множество чисел a, удовлетворяющих неравенству (4), состоит из двух промежутков: $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Если $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ или $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, то дискриминант D равен нулю и уравнение (3) имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{2a}$.

Для каждого значения a из промежутков $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ справедливо неравенство $D > 0$, и уравнение (3) имеет два корня: $x_1 = \frac{1-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{D}}{2a}$.

Ответ. Для каждого $a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ корней нет; для $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ или $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ единственный корень $x_0 = \frac{1}{2a}$; для $a = 0$ единственный корень $x_0 = -1$; для каждого $a \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ два корня: $x_1 = \frac{1-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{D}}{2a}$, где $D = 1 + 4a - 4a^2$.

ПРИМЕР 3. Решим уравнение с параметром a

$$\frac{a-1}{2ax+3} = 1. \qquad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{2ax+4-a}{2ax+3} = 0. \qquad (6)$$

Пусть $a = 0$, тогда уравнение (6) принимает вид $\frac{0 \cdot x + 4}{0 \cdot x + 3} = 0$ и не имеет решений.

Пусть $a \neq 0$. Сначала решим уравнение $2ax + 4 - a = 0$.

Оно имеет единственный корень $x_0 = \frac{a-4}{2a}$. Выясним, при каких значениях a число x_0 обращает в нуль знаменатель дроби в уравнении (6), т. е. найдем, для каких a справедливо равенство

$$2ax_0 + 3 = 0. \qquad (7)$$

Равенство (7) справедливо только для $a = 1$. Следовательно, при $a = 1$ число x_0 не является корнем уравнения (6).

При $a \neq 0$ и $a \neq 1$ уравнение (6) имеет единственный корень x_0.

Ответ. Для $a = 0$ и $a = 1$ корней нет; для каждого $a \neq 0$ и $a \neq 1$ единственный корень $x_0 = \dfrac{a-4}{2a}$.

ПРИМЕР 4. Для каждого значения параметра a решим уравнение

$$\sqrt{x-a} = \sqrt{2x-1+a}. \qquad (8)$$

При каждом значении параметра a уравнение

$$x - a = 2x - 1 + a \qquad (9)$$

будет следствием уравнения (8). Осталось выяснить, при каких условиях для параметра a единственное решение $x_0 = 1 - 2a$ уравнения (9) будет решением уравнения (8).

Подставляя $x_0 = 1 - 2a$ в обе части уравнения (8), находим, что его левая часть равна $\sqrt{(1-2a)-a} = \sqrt{1-3a}$, правая часть равна $\sqrt{2(1-2a)-1+a} = \sqrt{1-3a}$. Конечно же, было бы неправильным заключить в этот момент, что $x_0 = 1 - 2a$ будет решением уравнения (8) при каждом значении параметра a. Ведь при $a > \dfrac{1}{3}$ выражение $1 - 3a$, стоящее под корнем, будет отрицательным. Это значит, что при каждом $a > \dfrac{1}{3}$ найденный корень $x_0 = 1 - 2a$ уравнения (9) не является корнем уравнения (8). При каждом $a \leqslant \dfrac{1}{3}$ выражение $\sqrt{1-3a}$ имеет смысл, поэтому число $x_0 = 1 - 2a$ будет корнем уравнения (8) при каждом таком значении параметра a.

Ответ. Для каждого $a \leqslant \dfrac{1}{3}$ единственное решение $x_0 = 1 - 2a$; для каждого $a > \dfrac{1}{3}$ решений нет.

ПРИМЕР 5. Выясним, сколько действительных корней для каждого значения параметра a имеет уравнение

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = a. \qquad (10)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$. Она непрерывна и имеет производную на интервале $(-\infty; +\infty)$. Найдем точки локального максимума и локального минимума этой функции, для этого сначала найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

и приравняем ее к нулю:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0. \qquad (11)$$

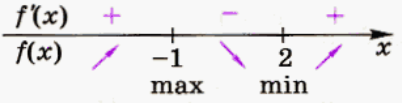


Рис. 177

Уравнение (11) имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$ и $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(-1; 2)$ (рис. 177), то точка $x_1 = -1$ есть точка локального максимума, а $x_2 = 2$ — точка локального минимума функции $f(x)$.

Найдем $f(-1) = 7$, $f(2) = -20$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2}\right) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Используя все написанное выше, получим, что схематический график функции $y = f(x)$ будет таким, как на рисунке 178.

Функция $y = f(x)$ на промежутке $(-\infty; -1]$ возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до 7 только один раз, на промежутке $[-1; 2]$ убывает, принимая все значения от 7 до -20 только один раз, а на промежутке $[2; +\infty)$ возрастает, принимая все значения от -20 до $+\infty$ только один раз. Поэтому:

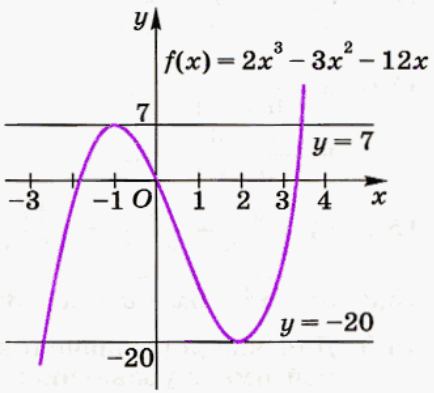


Рис. 178

1) если $a < -20$ или $a > 7$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в одной точке;

2) если $a = 7$ или $a = -20$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в двух точках;

3) если $-20 < a < 7$, то прямая $y = a$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в трех точках.

Следовательно, уравнение (10) имеет единственный действительный корень при $a \in (-\infty; -20) \cup (7; +\infty)$; только два действительных корня при $a = 7$ и при $a = -20$; только три действительных корня при $a \in (-20; 7)$.

Ответ. Для каждого $a \in (-\infty; -20) \cup (7; +\infty)$ единственный действительный корень; для $a = 7$ и для $a = -20$ два действительных корня; для каждого $a \in (-20; 7)$ три действительных корня.

Для каждого значения параметра a решите уравнение (15.1—15.8):

15.1 а) $(a - 2)x = a^2 - 4$; б) $(a + 2)x = a^2 - 4$;
в) $(a + 3)x = a^2 - 9$; г) $(a - 4)x = a^2 - 16$.

15.2 а) $\dfrac{x^2-1}{x-1}=a$; б) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=a$;

в) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=a+1$; г) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=a-1$.

15.3 а) $\dfrac{x-1}{x^2-1}=a$; б) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=a$;

в) $\dfrac{x+2}{x^2-4}=a-1$; г) $\dfrac{x-2}{x^2-4}=a+1$.

15.4 а) $\dfrac{a+10}{ax+5}=2$; б) $\dfrac{a-8}{ax-4}=2$;

в) $\dfrac{a+1}{ax+4}=1$; г) $\dfrac{a-2}{ax-3}=1$.

15.5 а) $|x-1|-a|x+1|=2$; б) $|x-2|-a|x+1|=3$;

в) $|x+3|-a|x-1|=4$; г) $|x+2|-a|x-3|=5$.

15.6 а) $\dfrac{a-5}{4ax+1}=1$; б) $\dfrac{a-4}{3ax+1}=2$;

в) $\dfrac{a-3}{2ax+1}=3$; г) $\dfrac{a-2}{ax+1}=4$.

15.7 а) $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{17}{x^2-9}$; б) $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{7}{x^2-a^2}=0$.

15.8 а) $\sqrt{x^2-6x-a}=x-3$; б) $\sqrt{x^2+2x+a}=x+1$.

15.9 Для каждого значения параметра a определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $x^3-3x^2+a=0$; б) $x^4-2x^2+a=0$.

15.2*. Неравенства с параметром

Решить неравенство с параметром — значит для каждого значения параметра найти множество всех решений данного неравенства (это множество может быть и пустым).

При решении неравенств с параметром используются те же соображения, что и при решении уравнений с параметром.

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решим неравенство

$$ax^2<1. \qquad (1)$$

Рассмотрим три случая: $a=0$, $a>0$ и $a<0$.

При $a=0$ неравенство (1) превращается в неравенство $0\cdot x^2<1$, верное при любом действительном x.

При $a > 0$ неравенство (1) равносильно неравенству $x^2 < \frac{1}{a}$, все решения которого составляют промежуток $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

При $a < 0$ неравенство (1) равносильно неравенству $x^2 > \frac{1}{a}$, справедливому при любом действительном x.

Ответ. Для каждого $a \leqslant 0$ любое $x \in \boldsymbol{R}$; для каждого $a > 0$ любое $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

ПРИМЕР 2. Для каждого значения параметра a найдем все решения неравенства

$$x^2 + ax + 1 \geqslant 0. \qquad (2)$$

Дискриминант квадратного неравенства (2) $D = a^2 - 4$.

Рассмотрим три случая: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

При каждом $a \in (-2; 2)$ дискриминант $D < 0$, поэтому решением неравенства (2) является любое действительное число.

При $a = 2$ и при $a = -2$ дискриминант $D = 0$, поэтому решением неравенства (2) является любое действительное число.

При каждом $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ дискриминант $D > 0$, поэтому множество решений неравенства (2) имеет вид $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, где $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Ответ. Для каждого $a \in [-2; 2]$ любое $x \in \boldsymbol{R}$; для каждого $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ любое $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$.

ПРИМЕР 3. Решим неравенство с параметром a

$$\log_a(7 - x) > 2\log_a(x - 1). \qquad (3)$$

По определению логарифма при $a = 1$ и каждом $a \leqslant 0$ не имеют смысла обе части неравенства (3), поэтому при каждом из этих значений a неравенство (3) не имеет решений. Остается рассмотреть все возможные значения параметра a из двух промежутков: $0 < a < 1$ и $a > 1$.

При каждом значении a из этих промежутков обе части неравенства (3) имеют смысл только на интервале (1; 7) и на этом интервале неравенство (3) равносильно неравенству

$$\log_a(7 - x) > \log_a(x - 1)^2. \qquad (4)$$

Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на своей области определения и на интервале (1; 7) неравенство (4) равносильно неравенству $7 - x < (x - 1)^2$, т. е. неравенству $x^2 - x - 6 > 0$. Множест-

во всех решений последнего неравенства есть множество $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Из этих чисел интервалу $(1; 7)$ принадлежат лишь числа из интервала $(3; 7)$. Эти числа и составляют множество решений неравенства (4) при $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a t$ возрастает на своей области определения. Поэтому неравенство (4) равносильно на интервале $(1; 7)$ неравенству $7 - x > (x - 1)^2$, т. е. неравенству $x^2 - x - 6 < 0$. Множество всех решений последнего неравенства есть интервал $(-2; 3)$. Из этих чисел интервалу $(1; 7)$ принадлежат лишь числа из интервала $(1; 3)$. Эти числа и составляют множество решений неравенства (4) при $a > 1$.

Ответ. Для $a = 1$ и для каждого $a \leqslant 0$ нет решений; для каждого $0 < a < 1$ любое $x \in (3; 7)$; для каждого $a > 1$ любое $x \in (1; 3)$.

Для каждого значения параметра a решите неравенство (15.10—15.23):

15.10 а) $(a - 1)x > a^2 - 1$; б) $(a + 2)x > a^2 - 4$;
в) $(a + 3)x \geqslant a^2 - 9$; г) $(a - 4)x \leqslant a^2 - 16$.

15.11 а) $ax^2 < 4$; б) $ax^2 > -4$;
в) $ax^2 \leqslant -9$; г) $ax^2 \geqslant 16$.

15.12 а) $a(x^2 - x) > 0$; б) $a(x^2 - x) \leqslant 0$;
в) $a(x^2 + x) \geqslant 0$; г) $a(x^2 + x) < 0$.

15.13 а) $ax^2 - x < 0$; б) $ax^2 - x > 0$;
в) $ax^2 + x \geqslant 0$; г) $ax^2 + x \leqslant 0$.

15.14 а) $x^2 + ax + 4 \geqslant 0$; б) $x^2 + ax + 9 < 0$;
в) $x^2 - ax + 4 > 0$; г) $x^2 - ax + 9 \leqslant 0$.

15.15 а) $x^2 + (a + 1)x + a \geqslant 0$; б) $x^2 + (a + 2)x + 2a \leqslant 0$;
в) $x^2 + (a - 3)x - 3a > 0$; г) $x^2 + (a - 4)x - 4a < 0$.

15.16 а) $\dfrac{x - 1}{x - a} > 0$; б) $\dfrac{x - a}{x + 2} > 0$; в) $\dfrac{x + 3}{x + a} \geqslant 0$; г) $\dfrac{x + a}{x - 4} \leqslant 0$.

15.17 а) $\dfrac{x^2 - a^2}{x - 1} > 0$; б) $\dfrac{x^2 - a^2}{x + 2} < 0$; в) $\dfrac{x - 3}{x^2 - a^2} \geqslant 0$; г) $\dfrac{x + 4}{x^2 - a^2} \leqslant 0$.

15.18 а) $(x - a)\sqrt{x - 1} \geqslant 0$; б) $(x - a)\sqrt{x - 2} \leqslant 0$;
в) $(x - 3)\sqrt{x - a} \geqslant 0$; г) $(x - 4)\sqrt{x - a} \leqslant 0$.

15.19 а) $\dfrac{\sqrt{x - a}}{x - 1} \geqslant 0$; б) $\dfrac{\sqrt{x - a}}{x + 2} \leqslant 0$;
в) $\dfrac{x + 3}{\sqrt{x - a}} \geqslant 0$; г) $\dfrac{x - 4}{\sqrt{x - a}} \leqslant 0$.

15.20 а) $\sqrt{x-a} \geqslant \sqrt{3-x}$; б) $\sqrt{x+a} \geqslant \sqrt{13-x}$;
в) $\sqrt{x-a} \leqslant \sqrt{23-x}$; г) $\sqrt{x-a} \leqslant \sqrt{33-x}$.

15.21 а) $\log_2(x-a) \geqslant \log_2(13-x)$; б) $\log_3(x-a) \geqslant \log_3(11-x)$;
в) $\log_4(x-a) \leqslant \log_4(9-x)$; г) $\log_5(x-a) \leqslant \log_5(7-x)$.

15.22 а) $\log_a(x-2) \geqslant \log_a(13-x)$; б) $\log_a(x-3) \geqslant \log_a(15-2x)$;
в) $\log_a(4-x) \geqslant \log_a(3x-15)$; г) $\log_a(5-x) \geqslant \log_a(4x-35)$.

15.23 а) $\log_a(x-1) \geqslant 2\log_a(3-x)$; б) $\log_a(x-3) \geqslant 2\log_a(5-x)$;
в) $\log_a(7-x) \geqslant 2\log_a(x-5)$; г) $\log_a(13-x) \geqslant 2\log_a(x-1)$.

15.3*. Системы уравнений с параметром

Решить систему уравнений с параметром — значит для каждого значения параметра найти множество всех решений данной системы (это множество может быть и пустым).

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решим систему уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2 \\ 2ax + (a+1)y = 2a + 4. \end{cases} \quad (1)$$

Из первого уравнения системы (1) находим, что $y = \dfrac{a+2-ax}{2}$. Подставляя $y = \dfrac{a+2-ax}{2}$ вместо y во второе уравнение системы, получаем, что для каждого значения параметра a система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} y = \dfrac{a+2-ax}{2} \\ a(a-3)x = (a+2)(a-3). \end{cases} \quad (2)$$

Если $a = 0$, то система (2) несовместна, так как второе уравнение этой системы запишется в виде $0 \cdot x = -6$. Если $a = 3$, то система (2) имеет бесконечно много решений вида $x = d$, $y = \dfrac{5-3d}{2}$, где d — любое число.

Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то система (2) имеет единственное решение $\left(\dfrac{a+2}{a}; 0\right)$.

Ответ. Для каждого $a \neq 0$ и $a \neq 3$ единственное решение $\left(\dfrac{a+2}{a}; 0\right)$, для $a = 3$ бесконечно много решений вида $\left(d; \dfrac{5-3d}{2}\right)$, где $d \in \boldsymbol{R}$; для $a = 0$ нет решений.

ПРИМЕР 2. Решим систему уравнений с параметром a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) находим, что $y = 1 - x$. Подставляя $1 - x$ вместо y в первое уравнение, получаем квадратное уравнение $2x^2 - 2x + 1 - a^2 = 0$, которое:

а) не имеет корней, если его дискриминант $D = 8a^2 - 4 < 0$, т. е. если $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) имеет один корень $x_1 = \frac{1}{2}$, если $D = 0$, т. е. если $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) имеет два корня: $x_1 = \frac{2 - \sqrt{D}}{4}$, $x_2 = \frac{2 + \sqrt{D}}{4}$, если $D > 0$, т. е. если $|a| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, если $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система (3) не имеет решений; если $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система (3) имеет одно решение $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; если $|a| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система имеет два решения: $\left(\frac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}; \frac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}\right)$.

Ответ. Для каждого $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ нет решений; для $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ одно решение $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; для каждого $|a| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ два решения: $\left(\frac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}; \frac{1 - \sqrt{2a^2 - 1}}{2}\right)$.

ПРИМЕР 3. Для каждого значения параметра a решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1 \\ \sin 2y \cos x = a. \end{cases} \qquad (4)$$

Так как $a^2 + 1 \geqslant 1$ для любого значения a, а $\sin x \cos 2y \leqslant 1$ для любых x и y, то система (4) имеет решения только в случае $a = 0$.

При $a = 0$ система (4) перепишется в виде

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1 \\ \sin 2y \cos x = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Складывая и вычитая уравнения системы (5), получим, что она равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x+2y)=1 \\ \sin(x-2y)=1. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) имеет решения $x=\frac{\pi}{2}+\pi(k+n)$; $y=\frac{\pi}{2}(k-n)$, $k\in Z$, $n\in Z$. Следовательно, все эти решения являются решениями системы (4).

Ответ. Для $a=0$ решения $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}(k-n)\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$; для каждого $a\neq 0$ нет решений.

ПРИМЕР 4. Для каждого значения параметра a решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=x+y \\ (2^x+1)2^{y+1}=a. \end{cases} \quad (7)$$

Возведя первое уравнение системы (7) в квадрат, получим, что для каждого значения a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=(x+y)^2 \\ (2^x+1)2^{y+1}=a \end{cases} \quad (8)$$

является следствием системы (7). Множество решений системы (8) для каждого значения a есть объединение всех решений двух систем

$$\begin{cases} x=0 \\ (2^x+1)2^{y+1}=a \end{cases} \quad (9)$$

и

$$\begin{cases} y=0 \\ (2^x+1)2^{y+1}=a. \end{cases} \quad (10)$$

Система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} x=0 \\ 2^{y+2}=a. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) при каждом $a\leqslant 0$ не имеет решений, а при каждом $a>0$ имеет единственное решение: $x=0$, $y=\log_2 a-2$. Система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} y=0 \\ 2^{x+1}=a-2. \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) при каждом $a\leqslant 2$ не имеет решений, а при каждом $a>2$ имеет единственное решение: $x=\log_2(a-2)-1$, $y=0$.

Итак, система (8) при каждом $a\leqslant 0$ не имеет решений; при каждом $a\in(0;\ 2]$ имеет единственное решение $(0;\ \log_2 a-2)$; при каж-

дом $a > 2$ имеет два решения: $(0;\ \log_2 a - 2)$ и $(\log_2(a-2) - 1;\ 0)$. Так как система (8) есть следствие системы (7), то теперь надо проверить, какие из найденных решений системы (8) являются решениями системы (7).

Подставляя пару чисел $(0;\ \log_2 a - 2)$ в первое уравнение системы (7), получаем, что равенство $\sqrt{(\log_2 a - 2)^2} = \log_2 a - 2$ справедливо лишь если $\log_2 a - 2 \geqslant 0$, т. е. если $a \geqslant 4$.

Подставляя пару чисел $(\log_2(a-2) - 1;\ 0)$ в первое уравнение системы (7), получаем, что равенство $\sqrt{(\log_2(a-2) - 1)^2} = \log_2(a-2) - 1$ справедливо лишь в том случае, если $\log_2(a-2) - 1 \geqslant 0$, т. е. если $a \geqslant 4$.

Проверка показывает, что обе пары чисел при любом $a \geqslant 4$ удовлетворяют второму уравнению системы (7), причем при $a = 4$ эти пары чисел совпадают. Следовательно, система (7) при каждом $a < 4$ не имеет решений, при $a = 4$ имеет единственное решение $(0;\ 0)$, а при каждом $a > 4$ имеет два решения.

Ответ. Для каждого $a < 4$ нет решений; для $a = 4$ единственное решение $(0;\ 0)$, для каждого $a > 4$ два решения: $\left(0;\ \log_2 \frac{a}{4}\right)$ и $\left(\log_2 \frac{a-2}{2};\ 0\right)$.

Для каждого значения параметра a решите систему уравнений **(15.24—15.29)**:

15.24 а) $\begin{cases} (a-1)y = a+1 \\ x + y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a+1)y = a+2 \\ x + y = a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a-1)y = a+3 \\ x - y = a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (a+1)y = a+4 \\ x - y = a. \end{cases}$

15.25 а) $\begin{cases} (a-1)y = a^2 - 1 \\ x + y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a+1)y = a^2 - 1 \\ x + y = a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (a-1)y = a^2 - 1 \\ x - y = a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (a+1)y = a^2 - 1 \\ x - y = a. \end{cases}$

15.26 а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = 1. \end{cases}$

15.27 а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = -1. \end{cases}$

15.28 а) $\begin{cases} \sin 2x \cos y = -a^2 - 1 \\ \sin y \cos 2x = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin 3x \cos 2y = -a^2 - 1 \\ \sin 2y \cos 3x = a + 1. \end{cases}$

15.29 а) $\begin{cases} (a^2-a)\sin\dfrac{x}{2}+2\cos y=a+5 \\ 3\sin\dfrac{x}{2}+\cos y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (a^2+a)\sin\dfrac{y}{2}+2\cos x=3a+1 \\ 3\sin\dfrac{y}{2}+\cos x=-4. \end{cases}$

15.4*. Задачи с условиями

В этом пункте рассматриваются задачи, в которых требуется найти все значения параметра, при каждом из которых выполнено некоторое условие.

ПРИМЕР 1. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых любое действительное число является корнем уравнения

$$\log_{x^2+a+1}(ax^2+2)=2\log_{7+2a}(5-\sqrt{6-2a}).$$

Пусть число a удовлетворяет условию задачи. Тогда решениями заданного уравнения будут все действительные числа. В частности, и число $x=1$ является решением этого уравнения.

Значит, верно равенство $\log_{a+2}(a+2)=2\log_{7+2a}(5-\sqrt{6-2a})$, т. е. равенство $\sqrt{7+2a}=5-\sqrt{6-2a}$. Рассматривая это равенство как уравнение относительно a, находим его корни $a_1=1$ и $a_2=-\dfrac{3}{2}$. Таким образом, все возможные значения a, удовлетворяющие условию задачи, содержатся среди этих чисел. Проверим, какие из них действительно являются решениями задачи.

Подставляя $a=1$ в исходное уравнение, получаем уравнение $\log_{x^2+2}(x^2+2)=2\log_9 3$, которому удовлетворяют все действительные числа, так что $a=1$ является решением задачи.

При $a=-\dfrac{3}{2}$ исходное уравнение имеет вид $\log_{x^2-\frac{1}{2}}\left(2-\dfrac{3}{2}x^2\right)=1$. Этому уравнению, в частности, не удовлетворяет число $x=0$, так что $a=-\dfrac{3}{2}$ не является решением задачи.

Ответ. $a=1$.

ПРИМЕР 2. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{x-a}{x-8a}<0 \qquad (1)$$

выполняется для всех x, принадлежащих отрезку $[2;\,4]$.

Задача заключается в нахождении таких значений a, при каждом из которых множество решений неравенства (1) содержит отрезок $[2; 4]$. Решим данное неравенство методом интервалов. Для этого надо нанести на ось Ox точки $x = a$ и $x = 8a$. В зависимости от того, каким может быть число a, эти точки будут по-разному располагаться на оси Ox, а в зависимости от этого будут по-разному записываться и решения неравенства (1) (рис. 179, *а*, *б*).

Если $a = 0$, то неравенство (1) перепишется в виде $\frac{x}{x} < 0$ и оно не имеет решений.

Если $a > 0$, то множество решений неравенства (1) есть интервал $a < x < 8a$ (см. рис. 179, *а*).

Если $a < 0$, то множество решений неравенства (1) есть интервал $8a < x < a$ (см. рис. 179, *б*).



Рис. 179

В случае $a < 0$ неравенству (1) удовлетворяют только отрицательные числа. Поэтому ни одно из этих a не удовлетворяет условию задачи. В случае $a > 0$ множество решений содержит отрезок $2 \leqslant x \leqslant 4$ только тогда, когда одновременно $a < 2$ и $8a > 4$, т. е. если $0{,}5 < a < 2$.

Ответ. Любое $a \in (0{,}5; 2)$.

ПРИМЕР 3. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Пусть a — некоторое число, удовлетворяющее условию задачи, и $(x_0; y_0)$ — решение данной системы уравнений при этом a. Очевидно, пара чисел $(y_0; x_0)$ также будет решением системы. Так как решение единственное, то $y_0 = x_0$, и из первого уравнения получаем, что либо $x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и тогда $a_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, либо $x_0 = y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и тогда $a_2 = -\sqrt{2}$. Таким образом, все возможные значения a, удовлетворяющие условию задачи, содержатся среди чисел $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -\sqrt{2}$. Решая систему уравнений при $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -\sqrt{2}$, убеждаемся, что и в том и в другом случае она не имеет решений, отличных от уже указанных.

Ответ. $a = \sqrt{2}$, $a = -\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 4. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых равносильны уравнения

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \tag{2}$$

и

$$28\sin^2 x = 2a + 9 + (2a - 5)\cos 4x. \tag{3}$$

Применяя формулу косинуса двойного угла, получаем:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(1 - 2\sin^2 x)^2 - 1 = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1.$$

Учитывая это равенство, уравнение (3) можно переписать в виде

$$2(2a - 5)\sin^4 x - (4a - 3)\sin^2 x + (a + 1) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим два случая: $a = \frac{5}{2}$ и $a \neq \frac{5}{2}$.

1) Если $a = \frac{5}{2}$, то уравнение (4) перепишется в виде $-7\sin^2 x + \frac{7}{2} = 0$, т. е. уравнения (2) и (3) совпадают.

2) Если $a \neq \frac{5}{2}$, то рассмотрим квадратное уравнение

$$2(2a - 5)y^2 - (4a - 3)y + (a + 1) = 0,$$

которое имеет два корня: $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = \frac{a+1}{2a-5}$. Следовательно, уравнение (4) равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{a+1}{2a-5}.$$

Легко видеть, что не существует значения a, при котором $\frac{1}{2} = \frac{a+1}{2a-5}$. Отсюда следует, что, для того чтобы уравнения (2) и (3) были равносильны, надо, чтобы уравнение $\sin^2 x = \frac{a+1}{2a-5}$ не имело решений. А это возможно в двух случаях:

или

$$\frac{a+1}{2a-5} < 0, \tag{5}$$

или

$$\frac{a+1}{2a-5} > 1. \tag{6}$$

Неравенству (5) удовлетворяют все a, такие, что $-1 < a < \frac{5}{2}$, а неравенству (6) — все a, такие, что $\frac{5}{2} < a < 6$. Следовательно, уравнения (2) и (3) равносильны для каждого $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

Объединяя случаи 1 и 2, получаем решение рассматриваемой задачи: $(-1; 6)$.

Ответ. Любое $a \in (-1; 6)$.

ПРИМЕР 5. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Пусть a_0 есть то значение параметра, при котором система имеет решение, и пусть $(x_0; y_0)$ — это ее решение. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{cases} -x_0^2 - 2x_0y_0 + 7y_0^2 \leqslant 1 - \dfrac{2}{1+a_0} \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 \leqslant -2. \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 2 и прибавим ко второму. Получим, что справедливо неравенство $x_0^2 + 6x_0y_0 + 9y_0^2 \leqslant \dfrac{-4}{a_0+1}$, т. е. неравенство $(x_0 + 3y_0)^2 \leqslant \dfrac{-4}{a_0+1}$. Отсюда следует, что $\dfrac{-4}{a_0+1} \geqslant 0$, т. е. что $a_0 < -1$.

Итак, все искомые значения параметра лежат в области $a < -1$.

Докажем теперь, что для каждого a, удовлетворяющего неравенству $a < -1$, система имеет решение. Так как при каждом $a < -1$ выполнено неравенство $-1 > -1 + \dfrac{2}{1+a}$, то достаточно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases} \qquad (7)$$

имеет решение, поскольку каждое решение системы уравнений (7) будет также и решением исходной системы неравенств.

Решим теперь систему (7). Умножив первое уравнение на -2 и прибавив ко второму, получим уравнение $(x + 3y)^2 = 0$, откуда $x = -3y$. Подставляя $-3y$ вместо x в любое из уравнений системы (7), получаем одно и то же уравнение $4y^2 = 1$, которое имеет два корня: $y_1 = \dfrac{1}{2}$ и $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. Но тогда $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_2 = \dfrac{3}{2}$. Проверкой убеждаемся, что обе пары чисел $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ являются решениями системы (7), а значит, и исходной системы неравенств (при $a < -1$).

Ответ. Любое $a < -1$.

ПРИМЕР 6. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$$

имеет единственный корень.

Так как множество значений функции $y = 2^x$ есть все $y > 0$ и каждое из этих значений принимается только в единственной точке x, то задача эквивалентна следующей: найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный положительный корень. Квадратный трехчлен $f(y) = y^2 - 2ay - 3a^2 + 4a$ имеет дискриминант $D = 16a(a - 1)$.

При $a = 0$ соответствующее квадратное уравнение имеет единственный корень $y = 0$, не принадлежащий множеству положительных чисел. Следовательно, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ дискриминант D также равен 0 и соответствующее квадратное уравнение имеет единственный корень $y = 1$, являющийся положительным числом. Так что значение $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Если выполнено условие $D < 0$, то квадратный трехчлен $f(y)$ вообще не имеет действительных корней, так что среди таких значений параметра искомые значения не содержатся.

Если параметр a удовлетворяет условию $D > 0$, т. е. неравенству $a^2 - a > 0$, то квадратный трехчлен $f(y)$ имеет два различных действительных корня. Обозначим эти корни через y_1 и y_2. Рассмотрим отдельно случай, когда среди этих корней есть равные нулю. Это возможно лишь в случае $-3a^2 + 4a = 0$. Значение $a = 0$ уже рассмотрено нами. В случае $a = \frac{4}{3}$ квадратное уравнение $f(y) = 0$ имеет единственный положительный корень $y = \frac{8}{3}$, так что значение $a = \frac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Наконец, если квадратный трехчлен $f(y)$ имеет ненулевые корни y_1 и y_2, то он будет иметь единственный положительный корень тогда и только тогда, когда произведение $y_1 \cdot y_2$, равное, согласно теореме Виета, $-3a^2 + 4a$, отрицательно. Итак, в этом случае все искомые значения параметра a есть решения системы неравенств

$$\begin{cases} a^2 - a > 0 \\ -3a^2 + 4a < 0, \end{cases}$$

множество решений которой состоит из двух промежутков: $a < 0$ и $a > \frac{4}{3}$.

Присоединяя к этим значениям найденные ранее $a = 1$ и $a = \frac{4}{3}$, получаем решение задачи.

Ответ. Любое $a < 0$, $a = 1$, любое $a \geqslant \frac{4}{3}$.

15.30 При каких значениях параметра:

а) $a \neq -3$ уравнение $2\sin 2x = \dfrac{a-1}{a+3}$ не имеет корней;

б) $a \neq 2$ уравнение $3\cos x = \dfrac{a+5}{a-2}$ не имеет корней?

15.31 При каких значениях параметра a уравнение:

а) $x + 2 = a|x - 1|$; б) $a|x - 3| = x + 1$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

15.32 Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение:

а) $|x + 2| = ax + 1$; б) $|x - 4| = ax + 2$?

15.33 При каких значениях параметра a уравнение:

а) $x^2 - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0$ имеет четыре различных корня;

б) $x^2 - (4a - 2)|x| + 3a^2 - 2a = 0$ имеет ровно два различных корня?

15.34 При каких значениях параметра a число:

а) 0 является корнем уравнения $\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$;

б) $-\dfrac{\pi}{2}$ является корнем уравнения $\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} = -\sin x$?

Для каждого такого значения a решите уравнение.

15.35 При каких значениях параметра a уравнение:

а) $\sqrt{x+1} = x + a$; б) $\sqrt{x+a} = x + 3$

имеет единственный корень?

15.36 При каких значениях параметра a уравнение:

а) $4^x - (5a - 3)2^x + 4a^2 - 3a = 0$ имеет единственный корень;

б) $9^x - 2(3a - 2)3^x + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных корня?

15.37 При каких значениях параметра b уравнение:

а) $\log_{2x+1}(3x^2 - bx - 0{,}25b) = 2$ имеет два различных корня;

б) $\log_{x-b}(0{,}75x^2 - x + b^2 - b) = 2$ имеет единственный корень?

15.38 При каких значениях параметра a:

а) все $x > 3$ являются решениями неравенства

$$(a - 2)x^2 - 2x - a > 0;$$

б) все $x > 1{,}5$ являются решениями неравенства

$$(a - 2)x^2 - 2x - 3a + 10 > 0?$$

15.39 При каких значениях параметра a неравенство:

а) $\sqrt{x^2-10x+26} \geqslant \dfrac{2a^2-4a-3}{a^2-2a-8}$ выполняется для всех x;

б) $\sqrt{x^2+8x+20} \leqslant \dfrac{2a^2-4a-3}{a^2-2a-8}$ не имеет решений?

15.40 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство:

а) $a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$;

б) $\left|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a\right| \leqslant 3$

выполняется для любого значения x.

15.41 Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства $(p-x)^2(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

15.42 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x+\dfrac{7a^2-a-2}{x-2}<-7a$ не имеет решений x, больших 1.

15.43 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $2x^2-3x+a+12 \leqslant 0$ не пусто и содержится среди решений неравенства $x^2+10x+a \leqslant 0$.

15.44 При каких значениях параметра a система уравнений:

а) $\begin{cases} x+\sqrt{y-a-2}=0 \\ y^2-x^2=a(2x+a) \end{cases}$ имеет два различных решения;

б) $\begin{cases} y+\ln\dfrac{|y|}{y}=x \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4 \end{cases}$ имеет единственное решение;

в) $\begin{cases} y=\log_2\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right) \\ (x-a)^2+(y-a)^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение;

г) $\begin{cases} 2+\log_2 y=\log_2(x+3y) \\ y=x+2a-4+2(x-a)^2 \end{cases}$ имеет два различных решения?

15.45 При каких значениях параметра a система уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{2x^2}{x+|x|} \\ (x-2(a+2))^2+(y-a)^2=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\dfrac{2\sqrt{3}\,x^2}{x+|x|} \\ \left(x-\dfrac{2a+1}{\sqrt{3}}\right)^2+(y-a)^2=4 \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение?

Исторические сведения

Уравнения и системы уравнений математики умели решать очень давно. В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III в.) еще не было систематического изложения алгебры, однако в ней содержался ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений. Есть в ней такая задача:

«Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96».

Чтобы избежать решения квадратного уравнения общего вида, к которому приводит обозначение одного из чисел буквой и которое тогда еще не умели решать, Диофант обозначал неизвестные числа $10 + x$ и $10 - x$ (в современной записи) и получал неполное квадратное уравнение $100 - x^2 = 96$, для которого указывал лишь положительный корень 2.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V в. н. э.

Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» Мухаммеда аль-Хорезми (787 — ок. 850). В нем рассмотрены и решены (в геометрической форме) 6 видов квадратных уравнений, содержащих в обеих частях только члены с положительными коэффициентами. При этом рассматривались только положительные корни уравнений.

В работах европейских математиков XIII—XVI вв. даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов в общее правило произвел немецкий математик Михаэль Штифель (1487—1567), который рассматривал уже и отрицательные корни.

В самом известном российском учебнике «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739) имелось немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

«Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Колико оная баталия будет иметь в лице и в стороне?», т. е. сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту было в 2 раза больше числа солдат, расположенных им в затылок?

В древневавилонских текстах (3000—2000 лет до н. э.) встречаются и задачи, решаемые теперь с помощью систем уравнений, содержащих и уравнения второй степени. Приведем одну из них:

«Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5».

Соответствующая система в современной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12} \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$


Ф. Виет

Эту задачу вавилонский автор решает правильно методом, который мы теперь называем методом подстановки, но он еще не пользовался алгебраической символикой.

В XVI в. французский математик Франсуа Виет (1540—1603), служивший шифровальщиком при дворе французского короля, впервые ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т. е. коэффициентов уравнений. Ф. Виет для обозначения нерасшифрованных букв в донесениях противника использовал редкие буквы латинского алфавита x, y и z, что и положило начало традиции обозначать неизвестные в уравнениях буквами x, y и z. Особенно ценил Виет открытые им формулы, которые теперь называются формулами Виета. Однако сам Виет признавал только положительные корни.

Лишь в XVII в. после работ Декарта, Ньютона и других математиков решение квадратных уравнений приняло современный вид.

Вернемся в начало XVI в. Тогда профессор математики болонского университета Сципион дель Ферро (1465—1526) впервые нашел алгебраическое решение уравнения третьей степени вида

$$x^3 + px = q, \qquad (1)$$

где p и q — числа положительные.

Это открытие, по обычаям того времени, профессор держал в строгом секрете. О нем знали лишь два его ученика, в том числе некий Фиоре. Утаивание математических открытий тогда было обычным явлением, так как в Италии практиковались математические диспуты-поединки. На многолюдных собраниях противники предлагали друг другу задачи для решения на месте или в определенный срок. Чаще всего это были задачи по алгебре, которую называли тогда великим искусством. Побеждал тот, кто решал больше задач. Победитель не только награждался славой и назначенным денежным призом, но и мог занять университетскую кафедру, а потерпевший поражение часто терял занимаемое место. Вот почему участнику диспута было важно обладать неизвестным другим алгоритмом решения некоторых задач.

После смерти профессора дель Ферро его ученик Фиоре, который сам не был глубоким математиком, вызвал на публичный диспут одного из виднейших математиков того времени Никколо Тарталья (1499 —1557). Готовясь к диспуту, Тарталья открыл формулу для нахождения корней кубических уравнений в радикалах, так как предполагал, что Фиоре уже обладал этой формулой. Позднее Тарталья писал: «Я приложил все свое рвение, усердие и уменье, чтобы найти правило для решения кубических уравнений, и, благо-



Н. Абель



Э. Галуа

даря благословенной судьбе, мне удалось это сделать за 8 дней до срока».

Диспут состоялся 20 февраля 1535 г. Тарталья в течение двух часов решил 30 задач, предложенных ему противником, а Фиоре не смог решить ни одной из 30 задач, предложенных Тартальей. После диспута Тарталья стал знаменитым во всей Италии, но продолжал держать открытую формулу в секрете.

Другой итальянский математик Джероламо Кардано (1501—1576) узнал от Тартальи правило решения кубического уравнения (1) и дал «священную клятву», что никому не раскроет этой тайны. Правда, Тарталья лишь частично раскрыл свою тайну, но Кардано, познакомившись с рукописями покойного профессора дель Ферро, получил полную ясность в этом вопросе. В 1545 г. Кардано опубликовал знаменитый свой труд «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге», где впервые опубликовал формулу для решения уравнения (1), а кубическое уравнение общего вида предлагал свести к уравнению (1).

После выхода в свет этой книги Кардано был обвинен Тартальей в нарушении клятвы, но формула, открытая дель Ферро и Тартальей, и по сей день называется формулой Кардано.

Такова полная драматизма история открытия формулы корней кубического уравнения (1).

В той же книге Кардано привел алгебраическое решение уравнения четвертой степени. Это открытие сделал один из его учеников Лудовико Феррари (1522—1565). После этого начались настойчивые поиски формул, которые сводили бы решение уравнений высших степеней к извлечению корней («решение в радикалах»). Эти поиски продолжались около трех столетий, и лишь в начале XIX в. норвежский ученый Нильс Хенрик Абель (1802—1829) и французский ученый Эварист Галуа (1811—1832) доказали, что уравнения степеней выше четвертой в общем случае в радикалах не решаются.

Выше речь шла об алгебраических уравнениях, т. е. уравнениях $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен относительно x.

Кроме алгебраических уравнений, есть еще и трансцендентные уравнения: показательные, логарифмические, тригонометрические и др. Решение трансцендентных уравнений, а также неравенств существенно опирается на свойства функций, которые изучаются в математике относительно недавно.

Особое место среди алгебраических уравнений занимают так называемые диофантовы уравнения, т. е. уравнения, в которых неизвестные предполагаются целыми числами.

Наиболее известными из них являются линейные диофантовы уравнения. Примеры задач, приводящих к линейным диофантовым уравнениям, находим в сборнике задач монаха Алькуина, приглашенного в 795 г. Карлом Великим преподавать в первую из известных школ в г. Аахен. Вот эта задача:

«100 шеффелей (денежных единиц) разделили между мужчинами, женщинами и детьми (число персон 100) и дали при этом мужчинам по 3 шеффеля, женщинам по 2 и детям по $\frac{1}{2}$ шеффеля. Сколько было мужчин, женщин и детей?»

Обозначив количество мужчин за x, количество женщин за y, мы придем к уравнению $3x + 2y + \frac{1}{2}(100 - x - y) = 100$.

Общего решения линейных диофантовых уравнений в те времена еще не знали и довольствовались лишь несколькими решениями, удовлетворяющими условию задачи. У самого Алькуина было приведено лишь одно решение этой задачи: мужчин, женщин и детей было 11, 15 и 74, а задача имеет 784 решения в натуральных числах.

Задачи, приводящие к линейным диофантовым уравнениям, имелись у Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180—1240), в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого.

Диофантовы уравнения играют важную роль в математике. Л. Эйлер писал: «Диофантовых уравнений анализ немало служит изощрению разума начинающих и большое проворство в искусстве приносит».

Известное диофантово уравнение Пифагора (VI в. до н. э.) $x^2 + y^2 = z^2$ решают в натуральных числах. Его решениями служат тройки чисел $(x; y; z)$:

$$x = (m^2 - n^2)l,\ y = 2mnl,\ z = (m^2 + n^2)l,$$

где m, n, l — любые натуральные числа $(m > n)$. Эти формулы помогают находить прямоугольные треугольники, длины сторон которых являются натуральными числами.



Пифагор


П. Ферма


А. Лежандр


П. Дирихле

В 1630 г. французский математик Пьер Ферма (1601—1665) сформулировал гипотезу, которую называют великой (или большой) теоремой Ферма: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ для натурального $n \geqslant 3$ не имеет решений в натуральных числах». Ферма не доказал свою теорему в общем случае, но известна его запись на полях «Арифметики» Диофанта: «...невозможно куб записать в виде суммы двух кубов, или четвертую степень — в виде суммы таких же степеней, или вообще любое число, которое является степенью большей, чем вторая, нельзя записать в виде суммы двух таких же степеней. У меня есть поистине удивительное доказательство этого утверждения, но поля эти слишком узки, чтобы его уместить». Позднее в бумагах Ферма было найдено доказательство его теоремы для $n = 4$. С тех пор более 300 лет математики пытались доказать великую теорему Ферма. В 1770 г. Л. Эйлер доказал теорему Ферма для $n = 3$, в 1825 г. Адриен Лежандр (1752—1833) и Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859) — для $n = 5$. Доказательство великой теоремы Ферма в общем случае не удавалось долгие годы. И только в 1993 г. Эндрю Вайлс доказал эту теорему.

Глава III

Комплексные числа

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

При рассмотрении действительных чисел отмечалось, что во множестве действительных чисел нельзя, например, найти число, квадрат которого равен (–1). При рассмотрении квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами также отмечалось, что такие уравнения не имеют корней, которые были бы действительными числами. Чтобы подобные задачи были разрешимы, вводят новые числа — **комплексные числа**.

§ 16*. Алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел

16.1*. Алгебраическая форма комплексного числа

Приведем формальное определение комплексных чисел.

Пусть a и b — действительные числа, i — некоторый специальный знак. Множеством комплексных чисел называют множество выражений вида $a + bi$, если они подчинены правилам:

а) выражения $a + bi$ и $c + di$ считают **равными** тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, при этом пишут:

$$a + bi = c + di;$$

б) **суммой** выражений $a + bi$ и $c + di$ называют выражение $(a + c) + (b + d)i$, при этом пишут:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

в) **произведением** выражений $a + bi$ и $c + di$ называют выражение $(ac - bd) + (ad + bc)i$, при этом пишут:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

г) каждое выражение вида $a + 0i$ отождествляют с действительным числом a, т. е. выражение вида $a + 0i$ и число a не различают,

при этом пишут: $a + 0i = a$; в частности, выражение $0 + 0i$ и число 0 не различают и пишут: $0 + 0i = 0$;

д) каждое выражение вида $0 + bi$ отождествляют с выражением bi и пишут: $0 + bi = bi$; в частности, выражение $0 + 1i$ отождествляют с выражением i и пишут: $0 + 1i = i$.

ПРИМЕР 1.

а) $(3 + 2i) + (-1 + 3i) = (3 - 1) + (2 + 3)i = 2 + 5i$;

б) $(-1 + 5i) + (-1 + (-5)i) = (-1 - 1) + (5 - 5)i = -2 + 0i = -2$;

в) $(7 + 2i) + (-7 + 1i) = (7 - 7) + (2 + 1)i = 0 + 3i = 3i$;

г) $(4 + (-3)i) + (-4 + 3i) = (4 - 4) + (-3 + 3)i = 0 + 0i = 0$.

ПРИМЕР 2.

а) $(3 + 2i)(-1 + 3i) = (-3 - 6) + (9 - 2)i = -9 + 7i$;

б) $(-1 + 5i)(-1 + (-5)i) = (1 + 25) + (5 - 5)i = 26 + 0i = 26$.

Каждый элемент множества комплексных чисел называют **комплексным числом**. Комплексное число i называют **мнимой единицей**. Покажем, что мнимая единица обладает свойством $i^2 = -1$.

Действительно, на основании правил «а» — «д» имеем

$$i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = \\ = -1 + 0 \cdot i = -1.$$

Комплексные числа вида bi называют **мнимыми числами**. Покажем, что bi есть произведение действительного числа b и мнимой единицы i. На основании правил «а» — «д» имеем

$$b \cdot i = (b + 0i)(0 + 1i) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (b \cdot 1 + 0 \cdot 0)i = 0 + bi = bi.$$

Любое комплексное число $a + bi$ есть сумма действительного числа a и мнимого числа bi. Действительно,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Комплексное число $a + bi$ часто обозначают одной буквой z и пишут:

$$z = a + bi.$$

Правую часть этого равенства называют **алгебраической формой комплексного числа z**. Число a называют **действительной частью** числа $z = a + bi$ и обозначают $\operatorname{Re} z = a$, а число b называют **мнимой частью** числа z и обозначают $\operatorname{Im} z = b$ (от франц. réel — реальный, действительный, imaginaire — мнимый, воображаемый).

Пусть даны комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$, ..., $z_n = a_n + b_n i$. Чтобы найти сумму комплексных чисел z_1, z_2, z_3, ..., z_n, надо найти сумму первых двух чисел, к полученной сумме прибавить третье число, к полученной сумме прибавить четвертое число и т. д., пока не переберем все слагаемые.

Аналогично определяется и произведение нескольких комплексных чисел.

Если комплексное число z взято множителем n раз ($n \geqslant 2$), то произведение $\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}$ называют ***n*-й степенью числа *z*** и обозначают z^n, т. е. по определению $\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}} = z^n$. Кроме того, по определению $z^1 = z$, а если $z \neq 0$, то $z^0 = 1$.

Для операций сложения и умножения существуют обратные операции.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме с z_2 дает z_1.

Покажем, что для любых комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ их разность $z_3 = z_1 - z_2$ существует, единственна и вычисляется по правилу

$$z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i.$$

По определению суммы комплексных чисел $z_2 + z_3 = (a_2 + x) + (b_2 + y)\, i$. По определению равенства комплексных чисел числа $z_2 + z_3$ и z_1 равны тогда и только тогда, когда одновременно справедливы равенства $a_2 + x = a_1$, $b_2 + y = b_1$.

Из этих равенств действительные числа x и y определяются, и притом единственным образом: $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, т. е. существует, и притом единственное, комплексное число

$$z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i,$$

которое и является разностью комплексных чисел z_1 и z_2.

ПРИМЕР 3.

а) $(3 + 2i) - (-1 + 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)\, i = 4 + (-1)\, i = 4 - i$;

б) $(-1 + 5i) - (-1 + (-5)\, i) = (-1 + 1) + (5 + 5)\, i = 0 + 10i = 10i$;

в) $(4 + (-3)\, i) - (-4 + 3i) = (4 + 4) + (-3 - 3)\, i = 8 + (-6)\, i = 8 - 6i$.

Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 ($z_2 \neq 0$) называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое при умножении на z_2 дает z_1.

Можно показать, что для любых комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ ($z_2 \neq 0$) их частное существует, единственно и вычисляется по правилу

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

ПРИМЕР 4. $\dfrac{1 + 2i}{3 + 4i} = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} + \dfrac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2}\, i = \dfrac{11}{25} + \dfrac{2}{25}\, i.$

Каждое комплексное число $z = a + bi$ имеет единственное **противоположное** ему число, обозначаемое $-z$, которое в сумме с числом z дает 0. Число $-z$ есть $-a - bi$. В самом деле,

$$z + (-z) = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)\, i = 0.$$

Разность комплексных чисел z_1 и z_2 равна сумме чисел z_1 и $(-z_2)$. В самом деле, пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тогда

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\,i = (a + (-c)) + (b + (-d))\,i = z_1 + (-z_2).$$

В частности, $a - bi = (a + 0i) - (0 + bi) = (a - 0) + (0 - b)\,i = a + (-b)\,i$.

Каждое отличное от нуля комплексное число $z = a + bi$ имеет единственное **обратное** ему число, обозначаемое $\frac{1}{z}$, которое при умножении на число z дает 1.

По правилу деления комплексных чисел если $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ есть любое комплексное число, то

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i.$$

ПРИМЕР 5. $\dfrac{1}{3 + 4i} = \dfrac{3}{3^2 + 4^2} - \dfrac{4}{3^2 + 4^2}\,i = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}\,i.$

Таким образом, сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел (делить на нуль нельзя) являются комплексными числами. Множество комплексных чисел содержит в себе множество действительных чисел.

Для комплексных чисел справедливы основные законы арифметических действий (проверьте самостоятельно).

Из изложенного выше вытекает, что все равенства, связанные с арифметическими действиями, приведенные в п. 1.2 учебника для 10 класса для действительных чисел, а также все тождества, доказанные ранее для действительных чисел, остаются справедливыми и для комплексных чисел. Поэтому арифметические действия с комплексными числами можно проводить так же, как они проводятся с алгебраическими выражениями, заменяя i^2 на -1 и объединяя затем члены, содержащие и не содержащие i.

ПРИМЕР 6. $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i$;
$(5 + 3i)(5 - 3i) = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34$.

Если числа z_1 и z_2 различные, то пишут: $z_1 \neq z_2$.

16.1° В каком случае выражения $a + bi$ и $c + di$ считаются:
а) равными; б) различными?

16.2° Что называют множеством комплексных чисел; комплексным числом?

16.3° При каком условии комплексное число $a + bi$ отождествляется с действительным числом a?

16.4° Какое комплексное число называют мнимым числом?

16.5° Какое комплексное число называют мнимой единицей?

16.6 Что называют действительной частью, мнимой частью числа $z = a + bi$? Как обозначают действительную часть, мнимую часть числа $z = a + bi$?

16.7 Что называют суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$?

16.8 Что называют произведением комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$?

16.9° Как вычисляют сумму, произведение нескольких комплексных чисел?

16.10 Что называют n-й степенью ($n \in N$) комплексного числа z?

16.11 Запишите основные законы сложения и умножения комплексных чисел, сформулируйте их.

16.12 Докажите справедливость основных законов сложения и умножения комплексных чисел.

16.13 Что называют разностью комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$? Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 их разность существует, единственна и вычисляется по правилу $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i$.

16.14 Что называют частным от деления комплексного числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ на комплексное число $z_2 = a_2 + b_2 i$ ($z_2 \neq 0 + 0i$)? Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 их частное $\frac{z_1}{z_2}$ существует и единственно.

Вычислите **(16.15—16.20)**:

16.15 а) $(3 + 2i) + (1 + 5i)$; б) $(3 - 11i) + (4 + 15i)$;
в) $(-5 + i) + (1 - 4i)$; г) $(8 - i) + (-8 + i)$;
д) $(-5 + 7i) + (5 - i)$; е) $(8 - i) + (4 + i)$.

16.16 а) $(3 + 2i) - (1 + 5i)$; б) $(3 - 11i) - (4 + 15i)$;
в) $(-5 + i) - (1 - 4i)$; г) $(8 + i) - (-8 + i)$;
д) $(5 + 7i) - (5 - i)$; е) $(8 - i) - (8 - i)$.

16.17 а) $(3 + 2i) \cdot (1 + 5i)$; б) $(3 - i) \cdot (4 + 5i)$;
в) $(-5 + i) \cdot (1 - 4i)$; г) $(8 + i) \cdot (-8 + i)$;
д) $(5 + 2i) \cdot (5 - i)$; е) $(8 - i) \cdot (8 + i)$.

16.18 а) $(3 + 2i) : (1 + 5i)$; б) $(3 - 11i) : (4 + 15i)$;
в) $(-5 + i) : (1 - 4i)$; г) $(8 + i) : (-8 + i)$;
д) $(5 + 7i) : (5 - i)$; е) $(8 - i) : (8 - i)$.

16.19 а) $(5 + 2i)^2$; б) $(3 - 2i)^2$; в) $(4 + i)^2$;
г) $(3 - 3i)^2$; д) $(4 + 4i)^2$; е) $(5 - 5i)^2$;
ж) $(1 + i)^3$; з) $(1 - 2i)^3$; и) $(2 + i)^3$.

16.20 а) $(3 + i)^2 + (3 - i)^2$; б) $(3 - 2i)^2 - (3 + 2i)^2$;
в) $(-5 + i)^2 - (5 - i)^2$; г) $(6 + i)^2 - (-6 + i)^2$;
д) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$; е) $(1 - 2i)^3 - (1 + 2i)^3$.

16.21 Упростите выражение:

а) $(x + i)(x - i)$; б) $(x + yi)(x - yi)$;

в) $(3x + yi)(3x - yi)$; г) $(x - 2yi)(x + 2yi)$;

д) $(-5x + 4y^2i)(5x - 4y^2i)$; е) $(6x^3 + yi)(-6x^3 + yi)$.

16.22 Разложите на множители:

а) $x^2 + 1$; б) $x^2 + y^2$; в) $16x^2 + y^2$;

г) $25x^2 + 9y^2$; д) $25x^4 + 16y^2$; е) $36x^6 + 16y^8$.

16.23 Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Какое комплексное число называют:

а) противоположным числу z; б) обратным числу z $(z \neq 0)$?

16.24 Пусть дано комплексное число $z = 12 + 5i$. Укажите число:

а) противоположное числу z; б) обратное числу z.

16.25 Пусть a и b — действительные числа. Приведите к виду $a + bi$ выражение:

а) $\frac{1}{i}$; б) $-\frac{1}{i}$; в) $\frac{1}{1+i}$; г) $\frac{1}{1-i}$; д) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$;

е) $i^3 - 2i^2 + i - 1$; ж) $i^{80} + i^{22} + i^7 + i^5 + i$.

16.26 Для какого действительного числа x выражение $(3 + xi)^2 - (4x + 2)i$ является:

а) действительным числом; б) мнимым числом?

16.27 Для какого действительного числа x выражение $(x + 2i)^2 + (5 + x)i$ является:

а) действительным числом; б) мнимым числом?

16.28 Определите все действительные числа a, при каждом из которых является действительным числом выражение:

а) $(1 + 4i)^3 + \frac{a + 100i}{1 + i}$; б) $(2 - 5i)^3 - \frac{(a + 4i)^2}{i^3}$.

16.29 Определите все пары $(x; y)$ действительных чисел x и y, для каждой из которых выполняется равенство:

а) $(2 + xi)^3 = -46 + yi$; б) $(y + 5i)(2y + 3i) = x - xi$.

16.30 Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие двум условиям:

а) $z^2 = -15 + 8i$ и $\operatorname{Im} z > 0$; б) $z^2 = 5 + 12i$ и $\operatorname{Re} z < 0$.

16.2*. Сопряженные комплексные числа

Если $z = a + bi$ есть комплексное число, то комплексное число $a - bi$ обозначают $\overline{z}$ и называют **сопряженным** с числом z и пишут: $\overline{z} = a - bi$. Легко видеть, что число, сопряженное числу $\overline{z}$, есть z, т. е. $\overline{\overline{z}} = z$, и поэтому числа z и $\overline{z}$ называют **взаимно сопряженными**.

Если $z = a$ — действительное число, то $\overline{z} = a$, т. е. если z — действительное число, то $\overline{z} = z$. Верно и обратное утверждение: если $\overline{z} = z$, то z — действительное число. Действительно, если $z = a + bi$, то $\overline{z} = a - bi$. Условие $\overline{z} = z$ означает, что $a + bi = a - bi$, откуда следует, что $b = 0$, т. е. z — действительное число.

Можно доказать следующие свойства, связанные с сопряженными числами:

1) Сумма и произведение взаимно сопряженных чисел есть действительное число.

2) Число, сопряженное с суммой двух любых комплексных чисел, равно сумме сопряженных чисел.

3) Число, сопряженное с разностью двух комплексных чисел, равно разности сопряженных чисел.

4) Число, сопряженное с произведением двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных чисел.

5) Число, сопряженное с частным двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел.

6) Число, сопряженное с n-й степенью ($n \in N$) комплексного числа z, равно n-й степени сопряженного числа.

В качестве следствия этих свойств имеем следующее утверждение:

Если число z выражено через комплексное число α при помощи произведения, суммы и разности натуральных степеней этого числа, то, заменяя в этом выражении число α на сопряженное ему число $\overline{\alpha}$, получим число $\overline{z}$, сопряженное с числом z.

16.31 Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Какое комплексное число называют сопряженным с числом z? Для каких чисел равны само число и число, ему сопряженное?

16.32 Укажите число, сопряженное комплексному числу:
а) $z = 12 + 5i$; б) $z = -1 - 2i$; в) $z = 2 - i$.

16.33 Докажите, что сумма и произведение взаимно сопряженных чисел — действительные числа.

16.34 Пусть u и v — произвольные комплексные числа. Докажите, что:
а) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$; б) $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$; в) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$;
г) $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$, если $v \neq 0$; д) $\overline{(u^n)} = (\overline{u})^n$, $n \in N$.

16.35 Выполните деление комплексных чисел:
а) $(1 + 2i) : (2 + i)$; б) $(1 - 2i) : (2 - i)$; в) $(3 + 2i) : (1 - i)$;
г) $(3 - 5i) : (3 + 4i)$; д) $(10 + i) : (3 + 5i)$; е) $(10 - i) : (13 - 5i)$.

16.36 Упростите выражение:

а) $\dfrac{1+2i}{3+4i}-\dfrac{1-2i}{3-4i}$; б) $\dfrac{3+2i}{12-5i}+\dfrac{3-2i}{12+5i}$.

16.37 Найдите пару комплексных чисел z и u, для которой выполняются соотношения:

а) $2\overline{z}+u=11i$ и $2z-3\overline{u}i=17$; б) $3\overline{z}-2\overline{u}=1$ и $\overline{z}-iu=-6i$.

16.38 Укажите число, сопряженное с комплексным числом z:

а) $z=(3+2i)+(1-i)$; б) $z=(3+2i)-(1-i)$; в) $z=(1+3i)^2$;
г) $z=(1-2i)^3$; д) $z=(3+i)^3+(1-i)^2-(1+i)$.

Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условию **(16.39—16.40)**:

16.39 а) $z^2+2\overline{z}+1=0$; б) $z^2-2(z+\overline{z})+4=0$.

16.40 а) $z\operatorname{Re}z+\overline{z}\operatorname{Im}z=3-2i$; б) $\dfrac{z}{\operatorname{Re}z}-\dfrac{2\overline{z}}{\operatorname{Im}z}=z(1+2i)$.

16.3*. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат xOy. Каждому комплексному числу $z=a+bi$ поставим в соответствие точку $A\,(a;\,b)$ (рис. 180). Тем самым между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости установлено взаимно однозначное соответствие, при котором каждому комплексному числу соответствует единственная точка, различным числам соответствуют различные точки и нет такой точки, которая бы не соответствовала какому-нибудь комплексному числу. Поэтому можно считать, что комплексное число $z=a+bi$ есть точка (точка z) на координатной плоскости. В силу этого соответствия между точками плоскости и комплексными числами координатную плоскость называют **комплексной плоскостью**.

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называют неотрицательное число $\sqrt{a^2+b^2}$, равное расстоянию от точки z до начала координат. Таким образом, каждое комплексное число $z=a+bi$ имеет свой модуль, обозначаемый $|z|$:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

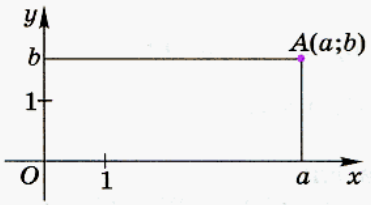


Рис. 180

В частности, если z есть действительное число, то модуль z есть абсолютная величина действительного числа a:

$$|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|.$$

Для чисел z и $\overline{z}$ справедливы следующие свойства:

1) $|\overline{z}|=|z|$; 2) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$.

Действительно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. $|\overline{z}| = |z|$; $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

ПРИМЕР 1. Найдем множество точек z комплексной плоскости, таких, что: а) $|z| = 1$; б) $2 \leqslant |z| < 3$.

Согласно геометрическому смыслу модуля комплексного числа это будут точки:

а) удаленные от начала координат на расстояние 1, т. е. точки окружности радиуса 1 с центром $O(0; 0)$ (рис. 181, *а*);

б) находящиеся внутри кольца, образованного окружностями с радиусами 2 и 3 и с центром $O(0; 0)$, включая окружность радиуса 2 (рис. 181, *б*).

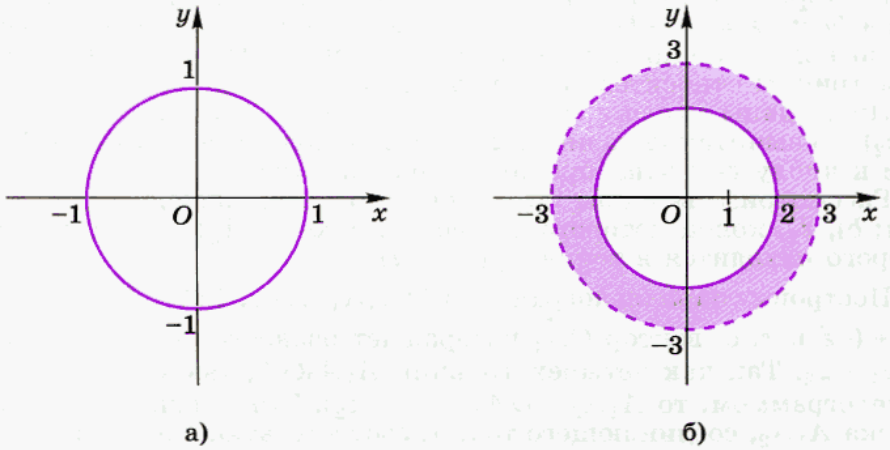


Рис. 181

Комплексное отличное от нуля число $z = a + bi$ можно рассматривать также как вектор (вектор $\vec{z}$), начало которого находится в начале координат, а конец — в точке $A(a; b)$, изображающей это число. На рисунке 182 вектор $\overrightarrow{OA}$ изображает комплексное отличное от нуля число $z = a + bi$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию сложения и вычитания двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ в том случае, когда точки $O(0; 0)$, $A_1(a; b)$ и $A_2(c; d)$ не лежат на одной прямой.

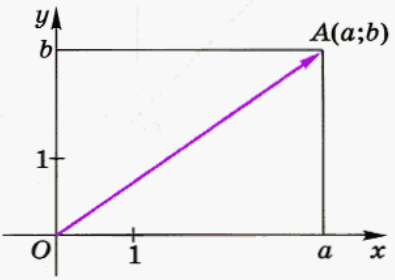


Рис. 182

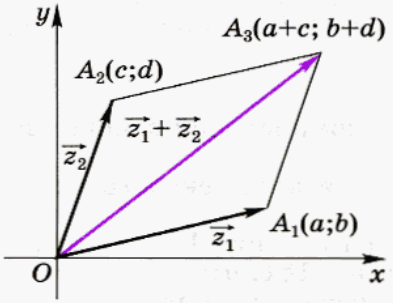


Рис. 183

Сумма чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ есть число $z_3 = (a + c) + (b + d)\,i$. Рассмотрим векторы $\vec{z}_1$, конец которого находится в точке $A_1(a;\ b)$, $\vec{z}_2$, конец которого находится в точке $A_2(c;\ d)$, и $\vec{z}_3$, конец которого находится в точке $A_3(a + c;\ b + d)$. Вектор $\vec{z}_3$ является диагональю параллелограмма $OA_1A_3A_2$ (рис. 183).

Таким образом, сложение комплексных чисел z_1 и z_2 можно интерпретировать как сложение по правилу параллелограмма соответствующих им векторов $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$.

Векторы, изображающие противоположные комплексные числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$, симметричны относительно начала координат, поскольку концы этих векторов — точки $M(a;\ b)$ и $N(-a;\ -b)$ — симметричны относительно начала координат (рис. 184).

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Так как $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, то вычитание из числа z_1 числа z_2 можно заменить прибавлением к числу z_1 числа, противоположного числу z_2.

Рассмотрим векторы $\vec{z}_1$, конец которого находится в точке $A_1(a;\ b)$, $\vec{z}_2$, конец которого находится в точке $A_2(c;\ d)$, и $\vec{z}_3$, конец которого находится в точке $A_3(-c;\ -d)$.

Построим параллелограмм $A_1OA_3A_4$ (рис. 185). Тогда $\overrightarrow{OA_4} = \vec{z}_1 + (-\vec{z}_2)$, т. е. вектор $\overrightarrow{OA_4}$ изображает разность комплексных чисел $z_1 - z_2$. Так как четырехугольник $A_1A_2OA_4$ также является параллелограммом, то $A_1A_2 = OA_4 = |z_1 - z_2|$. Это означает, что длина отрезка A_1A_2, соединяющего точки, соответствующие комплексным числам z_1 и z_2, равна $|z_1 - z_2|$ и модуль разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 представляет собой расстояние между точками A_1 и A_2, изображающими эти числа.

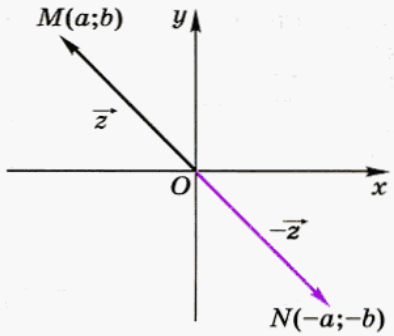


Рис. 184

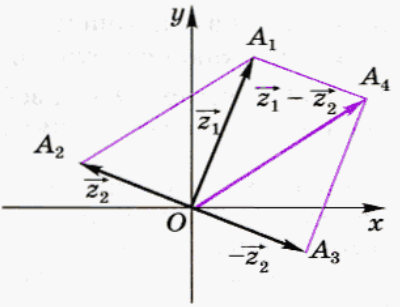


Рис. 185

Такое геометрическое толкование суммы и модуля разности двух комплексных чисел часто применяется при решении задач.

ПРИМЕР 2. Найдем множество точек комплексной плоскости, соответствующих комплексным числам z, таким, что $|z - i| = |z + 2|$.

Расстояния от каждой искомой точки z до точек i и -2 равны. Значит, искомое множество точек есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках (0; 1) и (–2; 0) (рис. 186). Его уравнение $y = -2x - 1{,}5$.

ПРИМЕР 3. Найдем точки z комплексной плоскости, удовлетворяющие условию

$$|z - 1| = |z - 2| = |z - i|.$$

Точки, соответствующие числам 1, 2 и i, образуют треугольник с вершинами (1; 0), (2; 0) и (0; 1) (рис. 187). Условию задачи удовлетворяет единственная точка — центр окружности, описанной около этого треугольника. Так как она равноудалена от точек (1; 0) и (2; 0), то ее абсцисса $x = 1{,}5$. Так как она равноудалена от точек (1; 0) и (0; 1), то ее абсцисса равна ординате: $x = y$. Условию задачи удовлетворяет единственная точка комплексной плоскости $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, т. е. точка (комплексное число) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ (рис. 187).

Отметим, что справедливы следующие свойства модулей комплексных чисел:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad (1)$$

$$|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \qquad (2)$$

Если $z_1 \neq \alpha z_2$, то неравенство (1) следует из того, что длина диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$, не превышает суммы длин этих векторов. Доказательство неравенства (1) для случая $z_1 = \alpha z$ и неравенства (2) проведите самостоятельно.

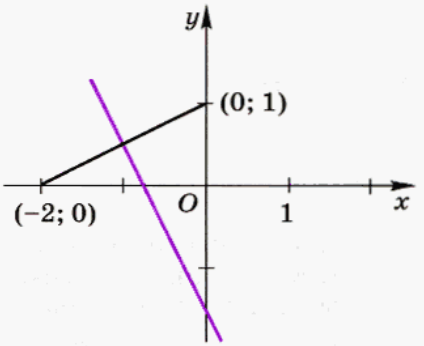


Рис. 186

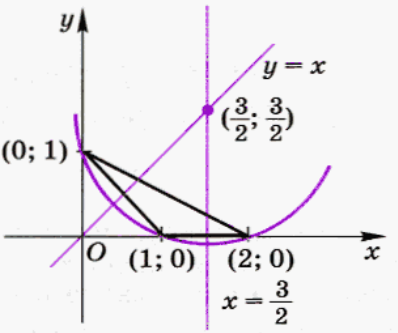


Рис. 187

16.41° Каким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами?

16.42° Что называют комплексной плоскостью?

16.43° Что называют модулем комплексного числа?

16.44 Найдите на комплексной плоскости точку, соответствующую комплексному числу:

а) 2; б) -2; в) i; г) $-i$;
д) $2 + i$; е) $2 - i$; ж) $-2 + i$; з) $-2 - i$.

16.45 Какому комплексному числу соответствует точка комплексной плоскости:

а) $(1; 0)$; б) $(0; 1)$; в) $(-1; 0)$; г) $(0; -1)$;
д) $(-2; 4)$; е) $(4; -2)$; ж) $(1; 1)$; з) $(-1; -1)$?

16.46 Какое геометрическое истолкование можно дать сумме и модулю разности комплексных чисел?

Найдите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию **(16.47—16.50)**:

16.47 а) $|z| = 4$; б) $|z| \leqslant 4$; в) $|z| \geqslant 4$.

16.48 а) $|z - 3| = 2$; б) $|z - 3| \leqslant 2$; в) $|z - 3| \geqslant 2$;
г) $|z - i| = 2$; д) $|z - i| \leqslant 2$; е) $|z - i| \geqslant 2$;
ж) $1 \leqslant |z + 1| \leqslant 3$; з) $1 \leqslant |z - i| \leqslant 4$; и) $1 \leqslant |z - 1 - i| \leqslant 2$.

16.49 а) $|z - 4| = |z + 4i|$; б) $|z + 2| = |z + 2i|$.

16.50 а) $\dfrac{|z + 1|}{|z - 2|} \geqslant 0{,}5$; б) $\dfrac{|z + 2i|}{|z - i|} \geqslant 2$.

Найдите комплексное число z, удовлетворяющее следующему условию, и соответствующую ему точку комплексной плоскости **(16.51—16.52)**:

16.51 а) $zi = 5 - 2i$; б) $-3 + i = z(1 + i)$.

16.52 а) $z(-3 + 2i) = 5 - 55i$; б) $-7 + 1{,}5i = z(5 - 4i)$.

§ 17*. Тригонометрическая форма комплексных чисел

17.1*. Тригонометрическая форма комплексного числа

В системе координат xOy вектор $\overrightarrow{OA}$ изображает комплексное отличное от нуля число $z = a + bi$ (рис. 188, *а* — *г*). **Главным аргументом** этого **комплексного числа** z называют угол из промежутка $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, образуемый вектором $\overrightarrow{OA}$ с единичным вектором оси Ox, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой

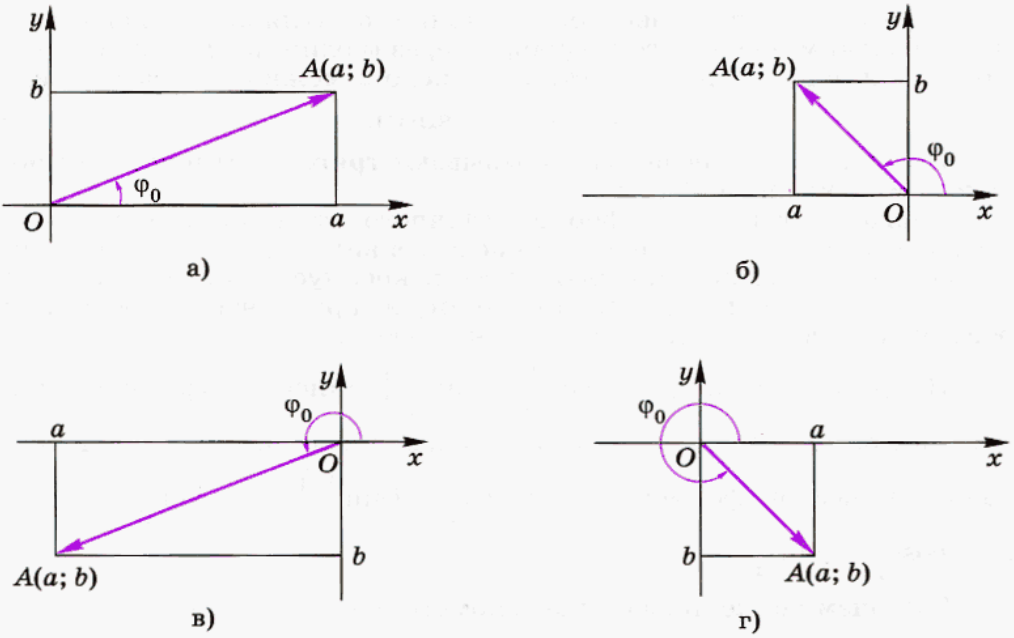


Рис. 188

стрелки). На рисунке 188 показан главный аргумент числа z. Главный аргумент числа z обозначают $\varphi_0 = \arg z$.

Если угол φ_0 есть главный аргумент числа z, то угол $\varphi_0 + 2\pi n$, где n — любое целое число, называют **аргументом числа z**, аргумент для любого комплексного числа $z \neq 0$ определяется неоднозначно: любой аргумент φ числа $z \neq 0$ вычисляется по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k,$$

где k — некоторое целое число, $\varphi_0 = \arg z$.

Аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ можно найти как угол, одновременно удовлетворяющий двум равенствам:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1. Найдем аргумент комплексного числа $z = 3 + 4i$.

Напишем равенства $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Ясно, что угол $\varphi_0 = \arcsin\frac{4}{5}$ им удовлетворяет, и так как $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, то φ_0 — главный аргумент числа z. Следовательно, аргументом числа z является любой из углов

$$\varphi = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $z = a + bi$ — некоторое отличное от нуля комплексное число. Обозначим через r его модуль, а через φ один из его аргументов. Тогда, как следует из равенств (1), число z можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Правую часть равенства (2) называют **тригонометрической формой** комплексного числа z.

Тригонометрическая форма отличного от нуля комплексного числа есть запись комплексного числа z в виде (2), где r — положительное число, равное модулю числа z, косинус и синус берутся от одного и того же угла φ, равного одному из аргументов числа z, при этом между $\cos\varphi$ и $i\sin\varphi$ стоит знак «плюс».

Например, число $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ записано в тригонометрической форме, а следующие комплексные числа не записаны в тригонометрической форме: $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_3 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$, $z_4 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$.

Запишем те же числа в тригонометрической форме:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),\ z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},\ z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

Действия умножения, деления и возведения в целую степень над любыми комплексными числами удобнее производить, если они записаны в тригонометрической форме.

В следующих теоремах под аргументом числа z ($z \neq 0$) понимается любой из его аргументов.

ТЕОРЕМА 1. **Если $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ и $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то:**

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Доказательство. а) Пусть даны комплексные числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Рассмотрим число $z_1 z_2$. Применяя правила действия над комплексными числами и формулы для косинуса и синуса суммы двух углов, имеем

$$z_1 z_2 = (r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)i) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

что и доказывает пункт «а» теоремы.

Доказательство пункта «б» теоремы проводится аналогично доказательству пункта «а», только предварительно надо умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на $(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$.

ТЕОРЕМА 2 (формула Муавра). Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3)$$

Доказательство. 1) Для любого натурального n докажем эту формулу методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула верна. Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е. предположим, что справедливо равенство

$$z^k = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi). \qquad (4)$$

Докажем, что из справедливости равенства (4) следует, что формула (3) справедлива для $n = k + 1$. Применяя равенство (4), правила действий над комплексными числами и формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, имеем

$$z^{k+1} = z^k z = (r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$$
$$= r^{k+1}((\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) + i(\sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi),$$

т. е. формула (3) доказана для $n = k + 1$. Следовательно, по принципу полной индукции формула (3) справедлива для любого натурального n.

2) Если $n = 0$ и $z \neq 0$, то по определению $z^0 = 1$, поэтому $z^0 = 1 \cdot (\cos 0\varphi + i\sin 0\varphi)$, т. е. формула (3) верна для $n = 0$.

3) Пусть $n = -1$ и $z \neq 0$. Применяя определение степени с целым показателем и теорему 1б, имеем

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

т. е. для $n = -1$ формула (2) верна.

4) Пусть n — любое целое отрицательное число и $z \neq 0$. Тогда $n = -m$, где $m = |n|$ — натуральное число. Применяя определение степени с целым показателем, формулу (3) сначала для $n = -1$, а затем для любого натурального m, имеем

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left(\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right)^m = \left(\frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right)^m =$$
$$= \left(\frac{1}{r}\right)^m(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Итак, формула (3) верна для любого целого n. Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Вычислим $(1+i)^7$.

Сначала запишем число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},\ z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь возведем его в степень 7 по формуле Муавра:

$$z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 - 8i.$$

ПРИМЕР 3. Выразим $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$ соответственно.

По формуле Муавра $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$. В то же время по формуле куба суммы получим

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i\sin x) + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + \\ + (i\sin x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i\,(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

По правилу равенства комплексных чисел имеем

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x,\ \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество, эти формулы можно записать так:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Используя формулы Муавра и бинома Ньютона, можно получить формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$ для любого натурального n.

17.1° а) Что называют аргументом отличного от нуля комплексного числа z?

б) Как можно найти аргумент комплексного числа z $(z \neq 0)$?

17.2 Приведите пример комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.

Запишите в тригонометрической форме комплексное число z, укажите его главный аргумент **(17.3—17.6)**:

17.3 а) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $z = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$; г) $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$.

17.4 а) $z = 1$; б) $z = -2$; в) $z = i$; г) $z = -3i$;
д) $z = 1 + i$; е) $z = 1 - i$; ж) $z = -1 + i$; з) $z = -1 - i$.

17.5 а) $z = \sqrt{3} + i$; б) $z = \sqrt{3} - i$; в) $z = -\sqrt{3} + i$;
г) $z = -\sqrt{3} - i$; д) $z = 1 + \sqrt{3}i$; е) $z = 1 - \sqrt{3}i$.

17.6 а) $z = 3 + 4i$; б) $z = 3 - 4i$; в) $z = 4 - 3i$;
г) $z = 5 - 4i$; д) $z = 1 + 2i$; е) $z = -3 - 2i$.

17.7 Выполните умножение комплексных чисел:

а) $\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

в) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

г) $3\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

17.8 Докажите теорему 1б о частном комплексных чисел.

Найдите $\arg z$, если **(17.9—17.10)**:

17.9 а) $z=1$; б) $z=-1$; в) $z=i$; г) $z=-i$;
д) $z=1+i$; е) $z=1-i$; ж) $z=-1+i$; з) $z=-1-i$.

17.10 а) $z=\sqrt{3}+i$; б) $z=\sqrt{3}-i$; в) $z=-\sqrt{3}+i$;
г) $z=-\sqrt{3}-i$; д) $z=1+\sqrt{3}i$; е) $z=1-\sqrt{3}i$.

17.11 Найдите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$; в) $\arg z\leqslant\pi$; г) $\arg z>\frac{3\pi}{2}$.

17.12 Запишите формулу Муавра для возведения любого отличного от нуля комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в степень с целым показателем n.

17.13 Возведите в степень 3 комплексное число:

а) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; б) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

в) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

17.14 Возведите в степень с показателем $n=1, 2, 3, 4, 5$ данное комплексное число z и найдите на комплексной плоскости точки, соответствующие полученным числам:

а) $z=1$; б) $z=-1$; в) $z=i$; г) $z=-i$;
д) $z=1+i$; е) $z=1-i$; ж) $z=-1+i$; з) $z=-1-i$.

17.15 Возведите в степень с показателем $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ комплексное число z и найдите на комплексной плоскости точки, соответствующие полученным числам:

а) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; б) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; в) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

г) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; д) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; е) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

17.16 Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо неравенство:

а) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; б) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

в) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$; г) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

17.17 Выразите через $\sin x$ и $\cos x$:

а) $\sin 4x$ и $\cos 4x$; б) $\sin 5x$ и $\cos 5x$; в) $\sin 6x$ и $\cos 6x$.

17.18 Вычислите:

а) $(1 + i\sqrt{3})^7 + (1 - i\sqrt{3})^7$; б) $(\sqrt{3} + i)^7 + (\sqrt{3} - i)^7$.

17.19 Вычислите:

а) $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}{(\sqrt{3} + i)^4}$; б) $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2}{(i\sqrt{3} - i)^4}$.

17.20 а) Пусть z — комплексное число: $|z| = 2$, $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$. Найдите модуль и один из аргументов числа $z^3 - 8i$.

б) Пусть z — комплексное число: $|z| = \dfrac{1}{2}$, $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$. Найдите модуль и один из аргументов числа $32z^4 + 2\sqrt{3}\,i$.

17.21 а) Найдите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = (2 + i)^2 + \dfrac{17}{1 + 4i}$. Среди этих точек найдите такие, для которых выполняется равенство $|z| = |z - 2i|$, и запишите числа, соответствующие этим точкам, в тригонометрической форме.

б) Найдите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = (4 - i)^2 + \dfrac{65}{1 - 8i}$. Среди этих точек найдите такие, для которых выполняется равенство $|z| = |z + 4|$, и запишите числа, соответствующие этим точкам, в тригонометрической форме.

17.2*. Корни из комплексных чисел и их свойства

ТЕОРЕМА. Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое натуральное число, $n \geqslant 2$. Существует n различных комплексных чисел α_1, α_2, α_3, ..., α_n, таких, что $\alpha_j^n = z$, где $j = 1, 2, ..., n$.

Эти числа называют **корнями степени n из комплексного числа z**. Для обозначения этих корней нет специальных символов, подобных символу, которым обозначается арифметический корень.

Доказательство. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$. Будем искать комплексное число $\alpha = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, $\alpha \neq 0$, такое, что $\alpha^n = z$, где n — любое натуральное число, $n \geqslant 2$. Покажем, что такое число α существует. Более того, покажем, что таких различных между собой чисел только n.

По формуле Муавра $z = \alpha^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.

По определению модуля комплексного числа $|z| = \rho^n$, т. е. $r = \rho^n$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (по определению модуля комплексного числа для $z \neq 0$ числа ρ и r положительны, поэтому символ арифметического корня здесь употреблен правильно).

Применяя определение равенства двух комплексных чисел, получаем, что одновременно справедливы равенства

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos\varphi \\ \sin n\psi = \sin\varphi. \end{cases}$$

Эти равенства одновременно выполнены тогда и только тогда, когда $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число, т. е. только для $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где k — любое целое число. Значит, числа α, такие, что каждое из них удовлетворяет равенству $\alpha^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, существуют и могут быть записаны в виде

$$\alpha = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Обозначая через α_p корень, вычисляемый по формуле (1) для $k = p$, получаем:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right),$$

$$\alpha_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) = \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n+1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n+1)}{n}\right) = \alpha_1,$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2n} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_{n-1},\ \alpha_{-2} = \alpha_{n-2},\ \ldots,\ \alpha_{-n} = \alpha_0,\ \ldots.$$

Отсюда легко видеть, что для любого целого p справедливы равенства $\alpha_0 = \alpha_{pn}$, $\alpha_1 = \alpha_{pn+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{pn+2}$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_{pn+n-1}$.

Итак, различных корней ровно n: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Они могут быть вычислены по формуле

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (2)$$

ПРИМЕР 1. Найдем корни третьей степени из числа $z = \sqrt{3} + i$.

Поскольку для числа z имеем $r = 2$, а $\varphi = \frac{\pi}{6}$, то

$$\alpha_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0, 1, 2,$$

т. е. $\alpha_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$,

$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

Рассмотрим частный случай: отыскание корней степени n, $n \geqslant 2$, из единицы, т. е. найдем все числа α_k, такие, что $\alpha_k^n = 1$. Рассмотрим число $z = 1 + 0i$. Поскольку для него $r = 1$ и $\varphi = 0$, то

$$\alpha_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Если $n = 2m$ (четное число), то среди этих корней существуют только два действительных корня: $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_m = -1$. Если же $n = 2m + 1$ (нечетное число), то существует только один действительный корень $\alpha_0 = 1$.

Приведем еще геометрическую интерпретацию корней степени n ($n \geqslant 3$) из единицы:

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\alpha_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots,\ \alpha_{n-2} = \cos\frac{2\pi(n-2)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-2)}{n},$$

$$\alpha_{n-1} = \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

Очевидно, что точки $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, одна из вершин которого — точка $A_0(1; 0)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$, тогда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точки $A_0(1;\,0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2};\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ являются вершинами правильного треугольника $A_0A_1A_2$, вписанного в единичную окружность (рис. 189).

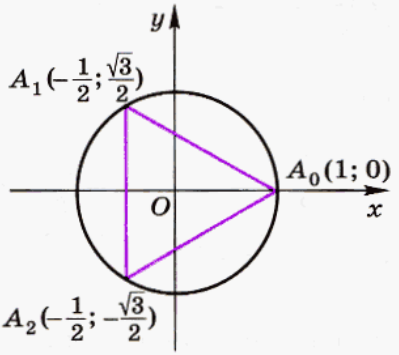


Рис. 189

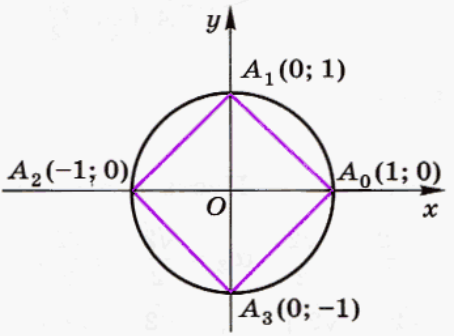


Рис. 190

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 4$, тогда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -i$. Точки $A_0(1;\,0)$, $A_1(0;\,1)$, $A_2(-1;\,0)$, $A_3(0;\,-1)$ являются вершинами квадрата $A_0A_1A_2A_3$, вписанного в единичную окружность (рис. 190).

Приведем теперь формулу для корня степени n ($n \geqslant 2$) из -1. Рассмотрим число $z = -1 + 0i$. Так как для него $r = 1$ и $\varphi = \pi$, то

$$\alpha_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{n}, \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что если $n = 2m$ (четное число), то среди α_k нет ни одного действительного корня. Если же $n = 2m + 1$ (нечетное число), то существует только один действительный корень $\alpha_m = -1$.

Отметим, что при $n \geqslant 3$ точки α_0, α_1, α_2, …, α_{n-2}, α_{n-1}, вычисленные по формуле (3), также являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность.

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 3$, тогда $\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точки $A_0\left(\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_1(-1;\,0)$, $A_2\left(\frac{1}{2};\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ являются вершинами правильного треугольника $A_0A_1A_2$, вписанного в единичную окружность (рис. 191).

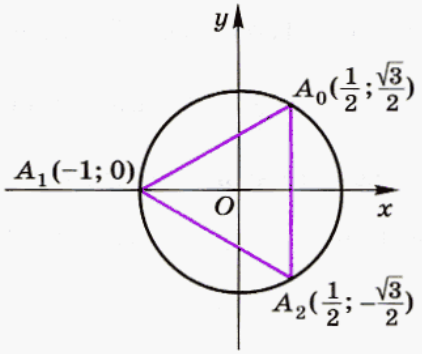


Рис. 191

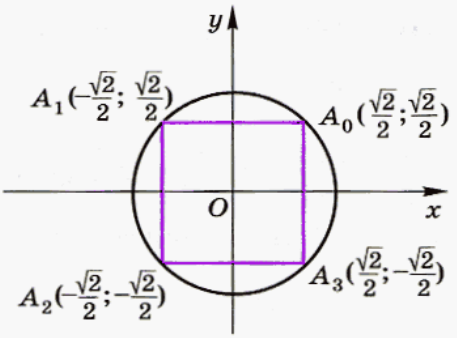


Рис. 192

ПРИМЕР 5. Пусть $n = 4$, тогда $\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Точки $A_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ являются вершинами квадрата $A_0A_1A_2A_3$, вписанного в единичную окружность (рис. 192).

Вообще для любого положительного числа a и любого четного натурального числа n существует только два действительных числа b_1 и b_2, таких, что $b_1^n = b_2^n = a$.

Действительно, поскольку для любого положительного числа $a = |a|(\cos 0 + i\sin 0)$, то все корни степени n из этого числа вычисляются по формуле $b_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$. Если $n = 2m$, то среди этих корней только два действительных корня: $b_0 = \sqrt[n]{|a|}$ и $b_m = -\sqrt[n]{|a|}$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать справедливость следующих утверждений:

1) Для любого положительного числа a и любого нечетного натурального числа n существует только одно действительное число $b = \sqrt[n]{a}$, такое, что $b^n = a$.

2) Для любого отрицательного числа a и любого нечетного натурального числа n существует только одно действительное число $b = -\sqrt[n]{|a|}$, такое, что $b^n = a$.

3) Для любого отрицательного числа a и любого четного натурального числа n не существует ни одного действительного числа b, такого, что $b^n = a$.

17.22 Сколько существует различных корней степени n ($n \geqslant 2$) из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($z \neq 0$)? Напишите формулу для вычисления этих корней.

17.23 Найдите корни степени 2 из комплексного числа:

а) $4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

в) $25\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $36\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$.

17.24 Найдите корни степени 2 из комплексного числа и найдите на комплексной плоскости точки, их изображающие:

а) 1; б) -1; в) $4i$; г) $-4i$;
д) $1 + i$; е) $1 - i$; ж) $1 + i\sqrt{3}$; з) $1 - i\sqrt{3}$.

17.25 Найдите корни степени 3 из комплексного числа и найдите на комплексной плоскости точки, их изображающие:

а) 1; б) -1; в) $8i$; г) $-8i$;
д) $1 + i$; е) $1 - i$; ж) $1 + i\sqrt{3}$; з) $1 - i\sqrt{3}$.

17.26 Пусть α_k — корни степени n ($n \geqslant 2$) из 1 ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Докажите, что:

а) $|\alpha_k| = 1$; б) $\alpha_k\alpha_m = \alpha_{k+m}$; в) $\frac{\alpha_k}{\alpha_m} = \alpha_{k-m}$; г) $\alpha_k^m = \alpha_{km}$.

17.27 Вычислите корни степени 4 из комплексного числа:

а) $-8 + 8\sqrt{3}\,i$; б) $-2 - 2\sqrt{3}\,i$.

§ 18*. Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел

18.1*. Корни многочленов

Ранее уже рассматривались многочлены $P_n(x)$ степени n ($n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 1$) относительно x:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

коэффициенты a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 которого — данные действительные числа, причем $a_n \neq 0$. При этом корнем многочлена (1) называли действительное число α, такое, что $P_n(\alpha) = 0$.

Теперь обобщим понятие корня многочлена (1).

Действительное или комплексное число α называют **корнем многочлена** (1), если $P_n(\alpha) = 0$, при этом иногда если α — действительное число, то корень называют действительным корнем, если α — комплексное число, то корень называют комплексным корнем.

Например, многочлен $x - 1$ имеет действительный корень 1, многочлен $x^2 + 1$ имеет два комплексных корня i и $-i$, многочлен $x^3 + x$ имеет три корня — один действительный корень 0 и два комплексных корня i и $-i$.

ТЕОРЕМА 1. Любой многочлен (1) степени n ($n \in N$, $n \geqslant 1$) имеет хотя бы один корень.

В теореме 1 имеется в виду любой (действительный или комплексный) корень. Доказательство теоремы 1 выходит за рамки школьного курса математики и поэтому опускается.

Теорему 1 называют **основной теоремой алгебры**. Эта теорема справедлива и тогда, когда коэффициенты a_n, ... a_0 ($a_n \neq 0$) многочлена (1) — данные комплексные числа.

Если многочлен (1) можно переписать в виде

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ и среди чисел α_1, α_2, ... α_m нет равных, то говорят, что каждое из чисел α_j, является корнем кратности k_j многочлена $P_n(x)$.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. Любой многочлен (1) степени n ($n \in N$, $n \geqslant 1$) имеет n корней, если каждый из его корней считать столько раз, какова его кратность.

Например, многочлен $x^4 + x^2$ имеет четыре корня: 0 кратности 2, i и $-i$ — каждый кратности 1.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$x^2 + px + q, \qquad (2)$$

где p и q — данные действительные числа.

Покажем, как найти корни этого многочлена. Преобразуем квадратный трехчлен, выделяя полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right). \qquad (3)$$

Если $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$, то $\frac{D}{4} = \left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)^2$, если $\frac{D}{4} < 0$, то $\frac{D}{4} = -\left(\sqrt{-\frac{D}{4}}\right)^2 = \left(i\sqrt{-\frac{D}{4}}\right)^2$, где знак арифметического корня употреблен правильно: под знаком корня стоит неотрицательное действительное число.

Итак, равенство (3) можно переписать так:

если $\frac{D}{4} \geqslant 0$, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}\right)$,

если $\frac{D}{4} < 0$, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} - i\sqrt{-\frac{D}{4}}\right)\left(x + \frac{p}{2} + i\sqrt{-\frac{D}{4}}\right)$.

Из этих равенств следует, что многочлен (2) всегда имеет два корня. Возможны три случая:

1) если $\frac{D}{4} > 0$, то $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}$, $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}$ и оба корня действительные и разные;

2) если $\frac{D}{4} < 0$, то $x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{-\frac{D}{4}}$, $x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{-\frac{D}{4}}$ и оба корня комплексные и различные (сопряженные числа);

3) если $\frac{D}{4} = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ и оба корня действительные и совпавшие, поэтому корень $x_1 = -\frac{p}{2}$ и называют корнем кратности 2.

ТЕОРЕМА 3. Если многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

с действительными коэффициентами a_n, a_{n-1}, ..., a_0 имеет комплексный корень $a + bi$ $(b \neq 0)$, то он обязательно имеет и корень $a - bi$.

Доказательство. Пусть число $z_0 = a + bi$ $(b \neq 0)$ — корень многочлена $P_n(x)$. Тогда $P_n(z_0) = 0$, т. е. справедливо равенство $a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$.

Возьмем теперь сопряженные числа от левой и правой частей равенства, получим, что $\overline{P_n(z_0)} = 0$. Теперь учтем, что сопряженное число к сумме равно сумме сопряженных чисел к слагаемым, а также тот факт, что для действительных чисел a_j справедливы равенства $\overline{a_j z_0^j} = a_j \overline{z_0^j} = a_j (\overline{z_0})^j$.

Поэтому получим равенство

$$P_n(\overline{z_0}) = a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + a_1(\overline{z_0}) + a_0 = \overline{P_n(z_0)} = 0.$$

Мы получили, что число $\overline{z_0}$, сопряженное к z_0, есть корень многочлена $P_n(x)$. Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 1. Найдем все корни многочлена $P_2(x) = x^2 + x + 1$.

Так как $\frac{D}{4} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, то многочлен $P_2(x)$ имеет два комплексных корня:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Эти корни являются сопряженными числами.

ПРИМЕР 2. Найдем все корни многочлена

$$P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4.$$

Из теоремы 3 следует, что многочлен $P_3(x)$ имеет хотя бы один действительный корень. Если этот корень рациональный, то он целый и является делителем числа -4. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 1$ является корнем многочлена $P_3(x)$. Разложим многочлен $P_3(x)$ на множители: $P_3(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 4)$.

Найдем корни многочлена $x^2 + 2x + 4$:

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3},\ x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Таким образом, многочлен $P_3(x)$ имеет три корня:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1 + i\sqrt{3},\ x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Рассмотрим уравнение

$$P_n(x) = 0, \qquad (4)$$

левая часть которого многочлен (1) степени n ($n \in N$, $n \geqslant 1$), а все коэффициенты — действительные числа. Ясно, что любой корень многочлена (1) является корнем уравнения (4).

Если n — четное число, то уравнение (4) либо не имеет действительных корней, либо имеет только четное число действительных корней (с учетом их кратности).

Если n — нечетное число, то уравнение (4) обязательно имеет хотя бы один действительный корень (число действительных корней может быть только нечетным).

Эти утверждения следуют из теоремы 3.

18.1 Убедитесь в том, что числа:

а) $1 + i$ и $1 - i$ являются корнями многочлена $x^2 - 2x + 2$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ являются корнями многочлена $x^2 - x + 1$.

Найдите все корни уравнения **(18.2—18.4)**:

18.2 а) $x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + x + 1 = 0$;
в) $x^2 + 3x + 6{,}25 = 0$; г) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
д) $x^2 + 3x + 3 = 0$; е) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

18.3 а) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; б) $3x^2 - x + 2 = 0$;
в) $2x^2 + 2x + 1 = 0$; г) $2x^2 - 2x + 1 = 0$;
д) $5x^2 + 7x + 3 = 0$; е) $6x^2 - 2x + 1 = 0$.

18.4 а) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;
в) $x^3 - 1 = 0$; г) $x^3 + 1 = 0$;
д) $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$; е) $x^3 + 5x^2 + 17x + 13 = 0$.

18.2*. Показательная форма комплексного числа

Ранее уже было дано определение действительной степени положительного числа. Теперь определим комплексную степень только одного числа $e = 2{,}7182818284590\ldots$.

Пусть $\alpha + \beta i$ — данное комплексное число, где α и β — некоторые действительные числа, тогда под числом $e^{\alpha+\beta i}$ понимают число $e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$, т. е.

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta). \qquad (1)$$

Пусть $z = a + bi$ — некоторое комплексное число, такое, что $a^2 + b^2 = 1$. Это число можно записать в тригонометрической форме

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (2)$$

Согласно определению (1) правую часть в формуле (2) можно записать в виде $e^{i\varphi}$ и тем самым получить формулу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (3)$$

Формулу (3) называют **формулой Эйлера**, который впервые записал ее в XVII в.

Возникает вопрос: почему в левой части формулы (3) написано число $e^{i\varphi}$? Ответить на этот вопрос можно следующим образом.

Разложим в ряд Тейлора каждую из функций $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = e^x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \qquad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots, \qquad (5)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \qquad (6)$$

Если в формуле (6) вместо x формально поставим ix, то получим

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \qquad (7)$$

Если теперь в правой части формулы (7) написать отдельно действительную и мнимую части, то окажется, что правая часть равенства (7) равна сумме правой части равенства (4) и правой части равенства (5), умноженной на число i. Но тогда такое же равенство должно выполняться и для левых частей равенств (4), (5), (7), а это и дает формальный повод записать формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Отметим частный случай формулы Эйлера: $e^{i\pi} = -1$.

Действительно, $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 \cdot i = -1$.

Отметим важные свойства величины $e^{i\varphi}$:

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \text{ при любом } \varphi.$$

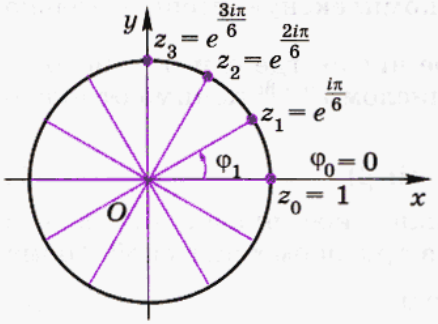


Рис. 193

Это показывает, что точка $z = e^{i\varphi}$ комплексной плоскости находится на единичной окружности, т. е. на окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

На рисунке 193 единичная окружность разделена на 12 равных частей. При этом точка, соответствующая $\varphi_0 = 0$, входит в число точек деления.

Ниже приведена таблица комплексных чисел, соответствующих этим точкам.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{11\pi}{6}$
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Числа $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ldots, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, записанные во второй строке таблицы, есть корни степени 12 из 1.

Если φ непрерывно возрастает от 0 до 2π, то в комплексной плоскости точка $e^{i\varphi}$ описывает единичную окружность, а при дальнейшем возрастании φ точка будет продолжать движение по окружности.

Докажем для любых φ_1 и φ_2 формулу

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}.$$

Действительно,

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

что и требовалось доказать.

Аналогично показывается, что

$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}.$$

Пусть теперь $z = a + bi$ — некоторое отличное от нуля комплексное число. Запишем его в тригонометрической форме

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Эйлера, число z можно записать в более компактной форме

$$z = r \cdot e^{i\varphi}. \tag{8}$$

Правую часть равенства (8) называют **показательной формой комплексного числа z.**

ПРИМЕР. Запишем комплексное число $z = 3 + 4i$ в показательной форме.

Сначала найдем модуль числа z: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Теперь запишем его в показательной форме:

$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 5e^{i\alpha},$$

где α — угол, для которого

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \ \sin\alpha = \frac{4}{5}. \tag{9}$$

Будем искать α среди углов, удовлетворяющих двойному неравенству $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Так как в данном случае $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$, то α находится в первой четверти. Из равенств (9) следует, что $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$.

Ответ. $z = 5e^{i\alpha}$, где $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$.

Рассмотрим теперь отличные от нуля комплексные числа, записанные в показательной форме:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \ z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \ z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}.$$

Тогда, учитывая написанное ранее, получаем формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$
$$z_1 : z_2 = r_1 : r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
$$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n} \ (n \in \boldsymbol{Z}).$$

Показательная форма комплексного числа позволяет записать комплексное число очень компактно, формулы умножения, деления, возведения в целую степень для такой формы записи очень просты. Поэтому показательная форма записи комплексного числа употребляется в различных приложениях, в особенности в физике.

Замечание. Определение (1) означает, что на самом деле введена функция

$$f(z) = e^z \tag{10}$$

комплексного аргумента z следующим образом: каждому комплексному числу $z = x + yi$ поставлено в соответствие комплексное число

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Укажем некоторые свойства функции (10):

1) При $y = 0$ функция (10) является показательной функцией $f(x) = e^x$, изученной ранее.

2) Функция (10) является периодической с периодом $2\pi i$.

Действительно, для комплексного числа $x + yi$ имеем:

$$f(z + 2\pi i) = e^{z + 2\pi i} = e^{x + i(y + 2\pi)} =$$
$$= e^x(\cos(y + 2\pi) + i\sin(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x + yi} = f(z).$$

Представьте в показательной форме комплексное число **(18.5—18.6)**:

18.5 а) $3 - 4i$; б) $1 + i$; в) $1 - i$; г) $1 + 2i$;
д) 5; е) -3; ж) $5i$; з) $-3i$.

18.6 а) $3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; б) $-4(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;
в) $5(\cos\alpha - i\sin\alpha)$; г) $-6(\cos\alpha - i\sin\alpha)$.

18.7 Запишите в алгебраической форме комплексное число:

а) $e^{\frac{i\pi}{4}}$; б) $2e^{\frac{i\pi}{3}}$; в) $4e^{\frac{i\pi}{2}}$; г) $5e^{i\pi}$;
д) $6e^{\frac{3i\pi}{4}}$; е) $7e^{\frac{2i\pi}{3}}$; ж) $8e^{\frac{3i\pi}{2}}$; з) $9e^{2i\pi}$.

18.8 Для комплексных чисел $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ докажите равенство:

а) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

18.9 Вычислите:

а) $e^{\frac{i\pi}{5}} \cdot 2e^{\frac{4i\pi}{5}}$; б) $3e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 4e^{\frac{i\pi}{3}}$; в) $3e^{\frac{i\pi}{14}} \cdot 4e^{\frac{i\pi}{7}}$;
г) $6e^{\frac{i\pi}{2}} : \left(2e^{\frac{i\pi}{7}}\right)$; д) $14e^{\frac{i\pi}{4}} : \left(7e^{\frac{i\pi}{6}}\right)$; е) $12e^{\frac{i\pi}{2}} : \left(8e^{\frac{i\pi}{6}}\right)$.

Исторические сведения

До введения отрицательных чисел можно было говорить, что уравнение $x + 3 = 2$ не имеет корней, так как не существовало неотрицательного числа, которое обращало бы это уравнение в верное числовое равенство. Однако после введения отрицательных чисел это уравнение стало разрешимым.

Точно так же уравнение $x^2 = -9$, не имеющее корней среди действительных чисел, становится разрешимым после введения новых чисел — комплексных чисел.

Эти числа были впервые введены итальянским математиком Кардано в середине XVI в. в связи с решением кубического уравнения, он назвал их «софистическими» (т. е. «мудреными»). Назва-


Р. Декарт


Л. Эйлер


К. Гаусс

ние «мнимые» (imaginaires) в 1637 г. ввел французский математик и философ Рене Декарт (1596—1650).

Еще в древности математики в процессе решения задач сталкивались с извлечением корня квадратного из отрицательного числа; в этом случае задача считалась неразрешимой. Однако постепенно выяснялось, что решение многих задач, задаваемых в действительных числах, получает простое объяснение при помощи выражений $a + bi$, где $i^2 = -1$, которые в конце концов тоже стали называть числами, но уже комплексными (см. § 16). Первое обоснование простейших действий над комплексными числами дал итальянский математик Раффаэле Бомбелли (ок. 1530—1572) в 1572 г., хотя еще долгое время к комплексным числам относились как к чему-то сверхъестественному.

Академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) внес существенный вклад в вопросы теории комплексных чисел. После его работ комплексные числа получили окончательное признание как предмет и средство изучения. Само название «комплексное число» было предложено в 1831 г. немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855), первое открытие которого — способ построения с помощью циркуля и линейки правильного 17-угольника — было связано с извлечением корней 17-й степени из единицы. Слово «комплексный» означает «сложный», «составной», «совокупный».

Рене Декарт впервые сформулировал в своей книге «Геометрия» основную теорему алгебры о числе корней уравнения n-й степени (см. п. 18.1). При этом Декарт допускал существование не только истинных (положительных) и ложных (меньших, чем ничего, т. е. меньших нуля — отрицательных) корней, но и воображаемых, мнимых, т. е. комплексных корней.

Долгое время не удавалось найти такие физические величины, над которыми можно было бы выполнять действия, подчиненные тем же правилам, что и действия над комплексными числами, в частности правилу $i^2 = -1$. Отсюда названия «мнимая единица», «мнимое число». В настоящее время известен целый ряд таких физических величин, и комплексные числа применяются не только в математике, но также в физике и технике (теория упругости, электротехника, аэродинамика и т. д.).

Задания для повторения

Данный раздел предназначен для повторения изученного в одиннадцатилетней школе. В разделе использованы задачи школьных выпускных экзаменов и конкурсных экзаменов в вузы страны. Список принятых сокращений приведен в конце раздела.

Числа

Вычислите (1—3):

1 (МГУЭСИ). а) $\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$; б) $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-2\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{15}}$;

в) $417\cdot\left(\dfrac{2}{10}+\dfrac{13}{990}\right):\left(\dfrac{4}{10}+\dfrac{21}{990}\right)$; г) $78\cdot\dfrac{\left(4\frac{3}{5}-1\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(11-1{,}25):2{,}5}$.

2 $\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}-41\frac{1}{4}+2001:3$.

3 (МГУЭСИ). а) $90\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$; б) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-2\sqrt{\dfrac{14}{25}}$;

в) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4 а) Делится ли число 679^{679} на число 2001? Ответ обоснуйте.
б) Делится ли на 679 число 2001^4-1322^4?

5 а) Натуральные числа с 1 по 2001 записали подряд без запятых: 12345678910111213141516171 8...20002001.
Делится ли полученное число на 3; на 9?
б) Натуральные числа, начиная с 1, выписали подряд без запятых: 123456789101112131415161718192021... .
Какая цифра стоит на 2001-м месте?

6 Сколько натуральных чисел от 1 до 2001 не делятся ни на 2, ни на 7?

7 Докажите, что $\sin 10^\circ$ — иррациональное число.

8 (СПбГПУ). Найдите натуральные числа n, для каждого из которых $(\text{НОД}(n;\,4))^2=n$, где НОД $(n;\,4)$ — наибольший общий делитель чисел n и 4.

9 Докажите, что число:
а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$
является целым, и найдите это число.

Вычислите без таблиц и калькулятора **(10—15):**

10 а) $\arccos(\sin 5) + \arcsin(\cos 5)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 4) + \operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg} 4)$.

11 (МГУ, геол. ф-т). а) $\operatorname{tg} 8x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$; б) $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

12 (МПГУ). а) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 245^\circ$;

б) $2 + \log_2 \sin 7^\circ 30' + \log_2 \sin 82^\circ 30' - \log_{0,5} \sin 75^\circ$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

13 (МГИЭТ). $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos(-\pi) - \sin\frac{\pi}{4}}$.

14 а) $10\log_3(5 + 2\sqrt{6}) + \log_3(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 21\log_3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

б) $12\log_2(8 + 2\sqrt{15}) + \log_2(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + 25\log_2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$.

15 (СПбГПУ). а) $3^{\log_2 5} \cdot 5^{-\log_2 3}$; б) $(\log_{\sqrt{2}} 9)(\log_8 3)^{-1}$.

16 (МГУ, почв. ф-т). Определите, что больше:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$ или $\sin\frac{43\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\log_{5\sqrt{5}}\frac{1}{125}\right)^2$ или $\cos^2\frac{31\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{29\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$.

17 (МГУ, геогр. ф-т). Сравните два числа:

а) $\frac{3\pi}{10}$ и $\arccos\frac{4}{5}$; б) $\frac{2\pi}{10}$ и $\arccos\frac{3}{10}$.

18 Известно, что:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\sin\alpha - \frac{3}{4}}\right)$ и $\frac{19\pi}{24}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\sin\alpha - 1}\right)$ и $\frac{19\pi}{24}$.

19 (МГУ, мехмат). Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z $(x \neq y)$ выражения:

а) $\log_{(x^5y^2z)}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right)$ и $\log_{(x^2y^5z)}\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$;

б) $\log_{\left(\frac{y^3z^2}{x}\right)}\left(x\sqrt[3]{\frac{y^4}{z}}\right)$ и $\log_{\left(\frac{y^2z^3}{x}\right)}(x\sqrt{yz})$

равны одному и тому же числу. Найдите это число.

20 (МГУ, ФНМ). Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1; при делении на 19 дает остаток 3, делится нацело на 7.

Алгебраические выражения

Упростите выражение (21—24):

21 $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\dfrac{5a^2-5b^2}{a^2+b^2}$.

22 (МГУЭСИ). а) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$;

б) $\left(\dfrac{4(a+b)^2}{ab}-16\right)\cdot\dfrac{(a+b)^2-ab}{ab}:\left(\dfrac{a^3-b^3}{11ab}\cdot\dfrac{44(a-b)}{ab}\right)$;

в) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\dfrac{bc}{(a+b+c)^2}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

г) $2\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})^{-1}\cdot\dfrac{a+b}{ab}$;

д) $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}-(a+b)^{-1}$.

23 $\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right):\dfrac{a-3}{a^3-1}$; найдите его значение при $a=\dfrac{1}{3}$.

24 (МГУ, ИСАиА).

а) $\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}(ab^{-1}+a^{-1}b)-0{,}5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a>b>0$;

б) $x\sqrt[4]{a}\,(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2-\dfrac{(x\sqrt{a})^{\frac{3}{2}}+a\sqrt{ab}-3b^2}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-\frac{1}{2}}}-x^3\sqrt[4]{a}-1$, где $a>0$, $x>0$;

в) $1-y+\dfrac{\sqrt[3]{(y-1)\sqrt{xy}+(3-y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y^{-2}}}\cdot y^{\frac{5}{6}}x^{-\frac{1}{6}}$, где $x>0$, $y>0$.

25 (МИСиС). Сократите дробь и вычислите значение полученного выражения при указанном значении x:

а) $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^3+2x^2-11x-12}$, $x=3$; б) $\dfrac{x^3+7x^2+16x+12}{x^3+5x^2+8x+4}$, $x=-2$.

26 (СПбГПУ). Упростите выражение:

а) $\dfrac{2}{a-2\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{a-a^{-1}}{1+a^{-1}}-\dfrac{a-a^{-1}}{1-a^{-1}}$.

27 (МЭИ). Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{a^2-\sqrt{x+a^4}}+\frac{1}{a^2+\sqrt{x+a^4}}\right)^{-1}+\left(\frac{2a^2+a^4}{x+a^4}+\frac{1}{1+a^4x^{-1}}-1\right)^{-1}.$$

28 (РЭА). Вычислите:

а) $\sqrt{25-a^2}+\sqrt{13-a^2}$, если $\sqrt{25-a^2}-\sqrt{13-a^2}=2$;

б) $\sqrt{34+a^2}-\sqrt{7+a^2}$, если $\sqrt{34+a^2}+\sqrt{7+a^2}=6$;

в) $\sqrt[3]{(2+b)^2(21+b)}-\sqrt[3]{(2+b)(21+b)^2}$, если $\sqrt[3]{21+b}-\sqrt[3]{2+b}=4$;

г) $\sqrt[3]{(3-2b)^2(2b-1)}-\sqrt[3]{(3-2b)(1-2b)^2}$, если $\sqrt[3]{3-2b}-\sqrt[3]{1-2b}=2$.

29 (РЭА). Вычислите:

а) $\dfrac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$, если $a=\log_3^2 8$, $b=\log_{\frac{1}{3}}^2 4$;

б) $\dfrac{c+d}{2\sqrt{c^3}}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{c^2-cd}{c+d}}+\sqrt{\dfrac{c^2+cd}{c-d}}\right)$, если $c=17\log_2 3$, $d=2\log_{0,5}81$;

в) $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$, если $p=\log_{\frac{1}{2}}^2 3$, $q=\log_2^2 9$.

Последовательности

30 а) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{3}$, а пятый $\sqrt{243}$. Найдите шестой член прогрессии.

б) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, а седьмой $\sqrt{128}$. Найдите восьмой член прогрессии.

31 (МГУ, социол. ф-т). а) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

б) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых четырех членов с нечетными номерами на единицу меньше суммы первых четырех членов с четными номерами и равна взятому с отрицательным знаком квадрату первого члена.

32 (МГУ, ФНМ). а) Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии отрицателен. Найдите все целые числа m, для каждого из которых сумма ее членов с нечетными номерами больше суммы ее членов с четными номерами на величину, равную произведению ее второго члена и числа вида $m^2+10m+20$.

б) Знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии положителен. Найдите все целые числа n, для каждого из

которых сумма ее членов с нечетными номерами больше суммы ее членов с четными номерами на величину, равную произведению ее второго члена и числа вида $6n - n^2 - 7{,}5$.

33 (МГУ, мехмат). а) О первых шести членах возрастающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 49. Найдите первый член этой прогрессии.
б) О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найдите седьмой член этой прогрессии.

34 (МГУ, почв. ф-т). а) Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.
б) Первый, четвертый и пятый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

35 (МГУ, почв. ф-т). а) Найдите арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы, начиная с первого, их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.
б) Найдите сумму n первых членов ряда $7 + 77 + 777 + \ldots$.

36 (МГУ, хим. ф-т). а) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т. д. Найдите произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.
б) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 3(a_1 + a_2)$ и т. д. Найдите произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

Функции

Постройте график функции **(37—46)**:

37 а) $y = |1 - 2x| + |2x + 3|$; б) $y = |2x - 3| + |1 - x|$.

38 а) $y = 2 - x - |x - 2| + 2|x|$; б) $y = 2 + x - 3|2 - x| + 2|x|$;
в) $y = 5 + 2x - |x - 2| - |x + 1|$; г) $y = |x + 2| - 2|x - 1| - x$.

39 а) $y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(5-x)^2}$; б) $y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$.

40 $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

41 а) $y = \sin x + |\sin x|$; б) $y = -\cos x|\cos x|$.

42 а) $y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}$; б) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

43 $y = \sin x|\sin x| - \cos x|\cos x|$.

44 $y = \cos x\sqrt{\cos^2 x} - \sin x\sqrt{\sin^2 x}$.

45 $y = \sqrt{1 - 4\sin^2 x\cos^2 x} - \cos^2 x + \sin^2 x$.

46 $y = \sqrt{\sin^2 2x} + 2\sin x\cos x$.

47 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:
а) $(y-1)(x^2-3x-18)=0$; б) $(y+1)(x^2+3x-10)=0$.

Укажите область определения функции **(48—55)**:

48 а) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$; б) $y = \dfrac{x+3}{x^2-9}$.

49 а) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; б) $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

50 а) $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x+3}}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{-4x^2+4x+3}{\sqrt{2x^2-7x+3}}}$.

51 а) $y = \sqrt{20 + 8x - x^2} + \sqrt[6]{x-4}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{33 + 8x - x^2}}{\sqrt[4]{x-5}}$.

52 (ВШЭ). а) $y = \sqrt{(x^4 - 4x^2 + 3)\cdot|2x-3|}$;
б) $y = \sqrt{(x^4 - 11x^2 + 18)\cdot|2x-5|}$.

53 а) $y = \dfrac{1}{\lg(2x-5)}$; б) $y = \dfrac{1}{\lg(2x+3)}$;
в) $y = \sqrt{2x^2-7x} + \dfrac{1}{\lg(2x+3)}$; г) $y = \sqrt{2x^2-5x} + \dfrac{1}{\lg(2x+1)}$.

54 (ВШЭ). а) $y = \sqrt{\log_2(x^2-2x-2)}$; б) $y = \sqrt{\log_4(x^2-4x-4)}$.

55 (МГУ, геогр. ф-т). а) $y = \sqrt{x^2-x-2} + \log_{3+x}(9-x^2)$;
б) $y = \sqrt{12-x-x^2}\cdot\log_{3-x}(\pi^2-x^2)$.

56 Найдите координаты общих точек графиков функции:
а) $y = \sqrt{x+7}$ и прямой $y - x - 1 = 0$;
б) $y = \sqrt{x-4}$ и прямой $y - 2x + 9 = 0$.

57 (МГИЭТ). а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}.$$

б) Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 5}{x - 2 - x^2}.$$

58 (МГУ, хим. ф-т). Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найдите значение функции $f(1999)$, если:

а) $f(1) = 1$ и $f(4) = 7$; б) $f(1) = 2$ и $f(4) = 8$.

59 Докажите, что:

а) $p^2 > 4q$, если известно, что $1 + p + q < 0$;

б) $b^2 > 4ac$, если известно, что $(a + b + c)(a - b + c) < 0$.

60 (МГУ, почв. ф-т). а) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8)$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

б) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1, такая, что $f(x) = x^2$ при $x \in [0; 1)$. Решите уравнение $f(2x + 5) + 2f(x) = 1$.

61 (МГУ, хим. ф-т). Найдите $f(2001)$, если функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению:

а) $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$, и известно, что $f(0) = 0$;

б) $f(x + 1) = f(x) + 2x + 3$, и известно, что $f(0) = 1$.

Линейные и квадратные уравнения

Решите уравнение **(62—65)**:

62 $\frac{8x - 3}{7} - \frac{3x + 1}{10} = 2.$

63 $(2 - 3x)^2 + (1 + 4x)^2 = (5x + 1)(5x - 1).$

64 (МИРЭА). а) $(21x + 44)^2 - 25(21x + 44) + 46 = 0$;

б) $(19x + 40)^2 - 23(19x + 40) + 42 = 0$;

в) $(17x + 36)^2 - 21(17x + 36) + 38 = 0$;

г) $(15x + 32)^2 - 19(15x + 32) + 34 = 0$.

65 (МИРЭА). а) $(x + 97)^2 + 34(x + 97) + 120 = 0$;

б) $(x + 79)^2 + 43(x + 79) + 120 = 0$;

в) $(x + 93)^2 + 35(x + 93) + 150 = 0$;

г) $(x + 86)^2 + 44(x + 86) + 160 = 0$.

66 Докажите, что при нечетных p и q уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет рациональных корней.

67 При каких целых значениях k являются рациональными числами корни уравнения $kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$?

68 Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, имеющее корень: а) $x = 4 - \sqrt{3}$; б) $x = 2 + \sqrt{3}$.

Рациональные уравнения

Решите уравнение **(69—76)**:

69 а) $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}$; б) $\frac{x-1}{x+1} - 3 \cdot \frac{x+1}{x-1} + 2 = 0$;

в) $\frac{3x-6}{2x} + \frac{4x}{x-2} - 5 = 0$; г) $\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

д) $\left(\frac{x^3+8}{x^3+4x^2+4x} - \frac{2}{x+2}\right)(x-2)^{-2} = \frac{1}{3}$.

70 (РЭА). а) $\frac{x+56}{9x^2-16} + \frac{1}{8-6x} = \frac{18}{3x^2+4x}$;

б) $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$;

в) $\frac{1}{4x-1} + \frac{2}{1-16x^2} + \frac{x-3}{12x+3} = 0$;

г) $\frac{4}{x^2-10x+25} + \frac{1}{25-x^2} - \frac{1}{x+5} = 0$.

71 (МИРЭА). а) $1 + \frac{3}{x^2-9x+18} = \frac{1}{x-6}$; б) $1 + \frac{6}{x^2-8x+7} = \frac{1}{x-7}$;

в) $1 + \frac{10}{x^2-8x+15} = \frac{5}{x-5}$; г) $1 + \frac{6}{x^2-6x+8} = \frac{3}{x-4}$.

72 (МИРЭА). а) $\frac{1}{x-5} = \frac{11}{x^2-20x+75}$; б) $\frac{1}{x-6} = \frac{13}{x^2-20x+84}$;

в) $\frac{1}{x-7} = \frac{19}{x^2-20x+91}$; г) $\frac{1}{x-8} = \frac{17}{x^2-20x+96}$.

73 (МИСиС). $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{18x+7}{x^3-1}$.

74 а) $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{x-10}{x-9} + \frac{x}{x+1}$; б) $\frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x+1} + \frac{x-7}{x-6}$.

75 (МИРЭА). а) $\frac{1}{(3x+5)(x-1)} + \frac{7}{(x+7)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{4}{(4x+3)(x-1)} + \frac{17}{(2x+5)(x-1)} = \frac{3}{x-1}$;

в) $\frac{3}{(2x+7)(x-1)} + \frac{2}{(4x-1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$;

г) $\frac{3}{(4x+5)(x-1)} + \frac{5}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$.

76 (ИКСИ АФСБ). а) $(10x-5)^2(10x-4)(10x-6)=72$;

б) $(3x+5)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2(3x+7)=\frac{1}{3}$.

Иррациональные уравнения

Решите уравнение **(77—91)**:

77 (МИРЭА). а) $x=\sqrt{3x+40}$; б) $x=\sqrt{10x+24}$;

в) $x=\sqrt{5x+36}$; г) $x=\sqrt{3x+28}$.

78 а) $\sqrt{10-x}=4-x$; б) $\sqrt{x-1}=x-3$;

в) $\sqrt{1+x}=2x-4$; г) $\sqrt{x+7}=4x-5$;

д) $x+3\sqrt{x-5}=5$; е) $x+2\sqrt{x-6}=6$;

ж) $\sqrt{x^4-3x-1}=x^2-1$; з) $\sqrt{x^4+x-9}=x^2-1$;

и) $\sqrt{x(x-2)(x+3)}=3-x$; к) $\sqrt{x(x+4)(x-3)}=6-x$.

79 (МГУ, геогр. ф-т). а) $\sqrt{3x+3}=2x-3$; б) $\sqrt{3x+2}=2x-4$.

80 а) $x+1=2-\sqrt{x-1}$; б) $1-\sqrt{x-2}=x-1$.

81 (МИРЭА).

а) $x^2-13x+30=(\sqrt{3x-18})^2$; б) $x^2-9x+13=(\sqrt{5x-35})^2$;

в) $x^2-8x+10=(\sqrt{7x-40})^2$; г) $x^2-15x+55=(\sqrt{x-8})^2$.

82 (МИРЭА). а) $\sqrt{3x-5}=3-2x$; б) $\sqrt{4x^2+4x+1}=x^2+x-1$;

в) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

г) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

83 (МИРЭА). а) $\sqrt{x^3-5x^2+7x-17}=\sqrt{x^3-4x^2-3x+4}$;

б) $\sqrt{x^3-8x^2-7x+2}=\sqrt{x^3-7x^2-18x+20}$;

в) $\sqrt{x^3-4x^2+20x-81}=\sqrt{x^3-3x^2+6x-41}$;

г) $\sqrt{x^3-5x^2+15x-77}=\sqrt{x^3-4x^2+2x-37}$.

84 (МГУ, социол. ф-т). а) $\sqrt{y-1}=6-y$; б) $\sqrt{x+1}=4-x$.

85 (МГУ, геогр. ф-т). а) $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$; б) $\sqrt{2x^2-8x+6}=x-2$.

86 а) $5\sqrt{x-2}+3\sqrt{x+1}+2x=17$; б) $\sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}+5x=14$.

87 а) $\sqrt{3x-15}-\sqrt{20-4x}+7x=35$; б) $\sqrt{3x+6}-\sqrt{-10-5x}-0{,}5x=1$;

в) $\sqrt{2x-12}+\sqrt{30-5x}+1{,}5x=10$.

88 (МИРЭА). а) $\sqrt[3]{297-3x}+\sqrt{x-18}=9$; б) $\sqrt[3]{200+2x}+\sqrt{300-x}=20$;
в) $\sqrt[3]{6+x}+\sqrt{35-x}=6$; г) $\sqrt[3]{192+4x}+\sqrt{-32-x}=4$.

89 (МИРЭА). а) $\sqrt[3]{3x+20}+\sqrt[3]{5x+4}=\sqrt[3]{2x+19}+\sqrt[3]{6x+5}$;
б) $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{7x+10}=\sqrt[3]{2x+15}+\sqrt[3]{6x+1}$;
в) $\sqrt[3]{2x+5}+\sqrt[3]{5x+16}=\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{6x+13}$;
г) $\sqrt[3]{4x+6}+\sqrt[3]{5x+12}=\sqrt[3]{3x+10}+\sqrt[3]{6x+8}$.

90 а) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+5}=\sqrt[3]{30-x}$; б) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}=\sqrt[3]{31-2x}$.

91 а) (МГУ, почв. ф-т). $\sqrt{5-x^2}=1-x$;
б) (МГУ, псих. ф-т). $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}$;
в) (МГУ, хим. ф-т). $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}$.

Показательные и логарифмические уравнения

Решите уравнение (92—100):

92 а) $3^{9x+10}=3^{6x-2}$; б) $7^{x^2-3x+1}=\frac{1}{7}$;
в) $5^{3x+1}=25^{x-1}$; г) $4^{2x}=16^{2x+5}$;
д) $3^{2x}=27^{x+6}$; е) $3^{9x+1}=9^{3x-1}$;
ж) $4^{-x+1}=8^{x}$; з) $64^{x+1}=8^{4\sqrt{x}}$.

93 а) $\frac{4^{3-0,2x}}{8}=0,5\cdot 2^{0,4-3x}$; б) $0,2\cdot 5^{0,3x-4}=\frac{125}{25^{0,2-x}}$;
в) $4^{x+1}+4^{x+2}=40$; г) $3^{x-1}-3^{x-2}=18$;
д) $9^{x+1}+3^{2x+4}=30$; е) $4^{x+1}-2^{2x-2}=60$.

94 а) $2^{2x+1}\cdot 3^{x}=2\cdot 12^{4-x}$; б) $2^{2x-1}\cdot 3^{x}=0,5\cdot 12^{4-x}$;
в) $9\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2}-18\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}+9=0$.

95 а) $7\cdot 3^{x+1}-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$;
б) $2^{x}-2^{x+2}+2^{x-1}=(3^{x+1}-3^{x+2}+3^{x})\cdot\frac{2}{9}$.

96 а) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)=0$; б) $\log_{\frac{27}{11}}\log_5(x^2-2x-3)=0$;
в) $\log_{\frac{3}{7}}\log_6(x^2-2x-3)=0$; г) $\log_{\frac{8}{3}}\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-5)=0$.

97 (МИРЭА). а) $4\log_9(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$;
б) $\log_2 182-4\log_4\sqrt{5-x}=\log_2(11-x)+1$;
в) $\log_x\sqrt{3}-\log_x^2\sqrt{3}=\log_3 27-\log_x(3x)$.

98 а) $5^{\lg x} = 50 - (10^{\lg 5})^{\lg x}$; б) $3^{\lg x} = 54 - (10^{\lg 3})^{\lg x}$.

99 а) (МГУ, физ. ф-т). $18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0$;

б) (МГУ, хим. ф-т)

$\log_{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}\sqrt{x} + \log_{\sqrt{x}}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \log_x(2\sqrt{6})$.

100 а) $\log_{3x} 4 - \log_{3x} 2 = 1$; б) $\log_{2x} 9 + \log_{2x} 3 = 3$.

Тригонометрические уравнения

Решите уравнение **(101—107)**:

101 а) $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$; б) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$.

102 а) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0$. Укажите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

б) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$. Укажите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

103 а) $\sin(0{,}5\pi + x) + \sin 2x = 0$; б) $\cos(0{,}5\pi + x) + \sin 2x = 0$.

104 а) $\sin 4x + \sqrt{3}\sin 3x + \sin 2x = 0$; б) $\cos 3x + \sin 5x = \sin x$.

105 (МИРЭА). а) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$; б) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$;

в) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 16\cos 2x$.

106 (МГУ, почв. ф-т). а) $\sin 2x = \cos x$; б) $\cos 2x = \sin x$.

107 а) $\sqrt{3}\sin^2 x + 0{,}5\sin(\pi + 2x) = 0$;

б) $\sqrt{3}\cos^2 x - 0{,}5\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

108 а) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < \frac{1}{2}$.

б) Найдите все решения уравнения $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < -\frac{1}{2}$.

109 (МИРЭА). Найдите все решения уравнения:

а) $\cos x + \cos 5x - \cos 2x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$;

б) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Решите уравнение **(110—118)**:

110 (МГУ, филол. ф-т). $3\cos 2x + 4\sin x = 1$.

111 (МГУ, геол. ф-т). $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

112 (МГУ, физ. ф-т). $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

113 (МГУ, ИСАиА). $5(\sin 2x)^2 + 8(\cos x)^3 = 8\cos x$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

114 (МГУ, хим. ф-т). $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x$.

115 (МГУ, биол. ф-т). $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$.

116 (МГУ, почв. ф-т). $\sin x = 2\operatorname{ctg} x$.

117 (МГУ, псих. ф-т). $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$.

118 (МГУ, экон. ф-т). $\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x$.

Уравнения с модулями

Решите уравнение **(119—129)**:

119 а) $\left|x - \frac{3}{7}\right| = \frac{2}{7}$; б) $\left|x - \frac{5}{8}\right| = \frac{3}{5}$.

120 (МИРЭА). а) $|14 - x| = x^2 - 196$; б) $|16 - x| = x^2 - 256$;
в) $|19 - x| = x^2 - 361$; г) $|17 - x| = x^2 - 289$.

121 (МГУ, хим. ф-т)
а) $x^2 + 1 + |x - 1| = 2|x|$; б) $x^2 + 1 + |x + 1| = 2|x|$.

122 а) $x^2 - 6|x| - 2 = 0$; б) $x^2 + 4|x| - 1 = 0$;
в) $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$; г) $|x^2 - 2x - 1| + x - 4 = 0$;
д) $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$; е) $\frac{|x|}{x} + 2x = x^2 + 1$.

123 (МГУ, экон. ф-т). $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

124 (МГУ, почв. ф-т). $|2x + 3| = x^2$.

125 (МГУ, хим. ф-т). $\frac{|x - 1|}{|x - 2|} = \frac{|x + 1|}{|x + 2|}$.

126 (МГУ, почв. ф-т)
а) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}$; б) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| = \cos x - \frac{1}{2}$.

127 а) $\sqrt{|2x + 1|} = 1 - 2|x|$; б) $\sqrt{|1 - 3x|} = 1 - 3|x|$.

128 (МГУ, мехмат). $\left|\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{5\pi}{17}$.

129 (МГУ, геогр. ф-т). $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1$.

Распадающиеся уравнения

Решите уравнение (130—134):

130 а) $(2x-7)\sqrt{3x^2-5x-2}=0$; б) $(2x-3)\sqrt{4x^2-5x-9}=0$;
в) $(3x^2-8x-11)\sqrt{3x-5}=0$; г) $(4x^2+3x-22)\sqrt{3x-15}=0$.

131 (МГУ, ФНМ). а) $(7\sin x-4\sqrt{3})(7\sin x-5\sqrt{2})=0$;
б) $(5\cos x-3\sqrt{3})(5\cos x-2\sqrt{6})=0$.

132 (МГУ, хим. ф-т). а) $(\sin x+\cos x-\sqrt{2})\sqrt{-11x-x^2-30}=0$;
б) $(\cos x+\sin x+\sqrt{2})\sqrt{-x^2-7x-12}=0$.

133 (МГУ, мехмат). а) $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0$;
б) $(2\cos^2 x-\cos x-1)\sqrt{\operatorname{ctg} x}=0$.

134 $\sqrt{4x-x^2-3}\,(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x})=0$.

Разные уравнения

Решите уравнение (135—158):

135 а) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$; б) $2\sqrt[4]{\dfrac{40x+1}{x-1}}-3\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{40x+1}}=5$.

136 (МФТИ). а) $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x+1}}-\sqrt{5x-3}=0$; б) $\sqrt{\dfrac{x+7}{3x+5}}-\sqrt{x+4}=0$.

137 (МИРЭА). а) $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{17x^2+8}-5}=\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{7x^2+2}-3}=\dfrac{1}{2}$;
в) $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{10x^2+6}-4}=\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{9x^2+7}-4}=\dfrac{1}{2}$.

138 а) $\sqrt{3x+5}-\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}=\sqrt{5x-3}-\dfrac{1}{\sqrt{5x-3}}$;

б) $\sqrt{7x+1002}-\sqrt{8x-1000}=\dfrac{1}{\sqrt{7x+1002}}-\dfrac{1}{\sqrt{8x-1000}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{\sqrt{2x-0{,}5}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+3}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-0{,}5}}$;

г) $\sqrt{x^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}$;

д) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2-4x+5}=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-4x+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

е) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2-9x+21}=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-9x+21}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

139 (МГУ, почв. ф-т). $\left(\dfrac{8}{7}\right)^{\frac{1}{y^2}}=\left(\dfrac{7}{8}\right)^{-\frac{1}{|2-y^2|}}$.

140 а) $2^{x-3}+2^{3-x}=-x^2+6x-7$; б) $2^{x-2}+2^{2-x}=-x^2+4x-2$.

141 (МГУ, псих. ф-т)

а) $x^{\log_7 4}+5\cdot 2^{\log_7 x}-4=0$; б) $x^{\log_5 9}+7\cdot 3^{\log_5 x}-11=0$.

142 (МГУ, хим. ф-т)

а) $\log_2\dfrac{x+2}{5}+\log_2\dfrac{5}{x}=1$; б) $\log_2\dfrac{x+3}{5}+\log_2\dfrac{5}{x+1}=1$.

143 (МГУ, геогр. ф-т)

а) $\log_{4x-8}(x^2-2x-3)=1$; б) $\log_{5-2x}(x^2-6x+8)=1$.

144 (МГУ, почв. ф-т). $\log_\pi|x^2-1|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|$.

145 а) $\log_{12}(x-3)+\sqrt{6-2x}+x=5$; б) $\log_{0,3}(10-5x)+\sqrt{3x-6}-x=2$.

146 (МГУ, мехмат)

а) $\sqrt[8]{\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{9\pi}{2}-2x\right)}=0$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{1-\cos 8x}{1+\cos 8x}}+\sqrt[7]{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-4x\right)}=0$.

147 (МГТУ). а) $|5-x|+|x+1|=6\sin x$;

б) $|x-2|+|x-8|=6\sin x$; в) $|x+5|+|x-1|=6\sin x$.

148 (МГУ, геогр. ф-т). а) $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$;

б) $\sqrt{|x^2-12x+34|-1}=|x-6|-1$.

149 (МГУ, ВМиК). $\cos(\pi(x+3\sqrt{x}))\cos(\pi(2x-\sqrt{x}))=-1$.

150 (МГУ, геол. ф-т). $\dfrac{\log_3(-x)}{\log_9(-5x-4)}=1$.

151 (МГУ, геол. ф-т). $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{x-2}\cdot\left(\dfrac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{125}{343}$.

152 (МГУ, физ. ф-т). $2\sin 2x\cos(5x^2)-\sin(5x^2+2x)=0$.

153 (МГУ, экон. ф-т)

$$\sqrt{3}\cos\left(\pi\sqrt{x}\sqrt{\frac{6}{x}-x-4}\right)+3\sin\left(\pi x\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x}-1}\right)=\sqrt{12}.$$

154 (МГУ, мехмат). $4x - 3|x-1| = 4\sqrt{5x+14} - 3\sqrt{5x-14} - 1$.

155 (МГУ, хим. ф-т). $\arcsin\dfrac{6x-7}{2x-3} = 2\pi - \pi x$.

156 (МГУ, биол. ф-т). $x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0$.

157 (МГУ, геогр. ф-т). $4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \dfrac{6\pi}{x}$.

158 а) $\log_{\sin x}(3\sin x - \cos x) = 0$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}} = 1$.

159 (РЭА). Найдите больший корень уравнения:

а) $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$;

б) $\left(\sqrt[5]{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt[5]{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 2$;

в) $(2\sqrt{3}-2)^x + 2^{x+1} = 2(\sqrt{3}+1)^x$;

г) $3^x + \left(3\sqrt{\sqrt{10}-1}\right)^x = 2\left(\sqrt{\sqrt{10}+1}\right)^x$.

Рациональные неравенства

Решите неравенство **(160—169)**:

160 $\dfrac{2x+5}{3} - \dfrac{6x-1}{4} \geqslant x+1$.

161 а) $3x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 2x - 3 > 0$.

162 а) $x^3 - 3x - 2 < 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 4 > 0$.

163 (МИРЭА). $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+4)(3-x)(2x+1)} > 0$.

164 а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} < 0$; б) $\dfrac{x^2-6x+18}{-x^2+8x-12} > 0$.

165 а) $\dfrac{3}{x-2} \geqslant x$; б) $x \geqslant \dfrac{2}{x-1}$; в) $\dfrac{x^2-1}{x+5} < 1$; г) $\dfrac{2x-1}{x-3} < x+3$.

166 (МФТИ). а) $\dfrac{5}{2-x} > 1 + \dfrac{3}{x+2}$; б) $\dfrac{5}{x+4} < 1 + \dfrac{1}{4-x}$;

в) $\dfrac{2}{3-x} > 1 - \dfrac{3}{x+2}$; г) $\dfrac{7}{x+5} < 1 + \dfrac{2}{5-x}$.

167 а) $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{x+4}{x+2} < \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{7}$.

168 а) $\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 0$; б) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} \geqslant 0$; в) $\dfrac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}} \leqslant 0$; г) $\dfrac{1-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} \geqslant 0$.

169 (МГУ, филол. ф-т)

а) $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \geqslant \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$; б) $\dfrac{1}{3x^2+11x+10} \geqslant \dfrac{1}{2-x-x^2}$.

Иррациональные неравенства

Решите неравенство **(170—175)**:

170 (МИРЭА). а) $\sqrt{12x-11} < \sqrt{10x-9}$; б) $\sqrt{11x-9} < \sqrt{9x-7}$;

в) $\sqrt{10x-7} < \sqrt{9x-5}$; г) $\sqrt{10x-9} < \sqrt{8x-7}$.

171 (МФТИ). а) $\sqrt{x^2-9} < 14-2x$; б) $\sqrt{x^2-6x} < 8+2x$;

в) $2-3x < \sqrt{4+9x-9x^2}$; г) $4-5x < \sqrt{16+30x-25x^2}$.

172 (МИРЭА). а) $\sqrt{3-x} > x-2$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$.

173 (МГУ, псих. ф-т). а) $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1$; б) $\dfrac{3x-2}{\sqrt{5x-2}} < 1$.

174 а) $\sqrt{x^2+5x} + \sqrt{-x^2-7x-10} < \sqrt{20-x} - 5$;

б) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{-x^2-x+2} \geqslant 1-\sqrt{x}$.

175 (МГУ, геол. ф-т). $\sqrt{x^2-8x+12} \geqslant x-5$.

Показательные и логарифмические неравенства

Решите неравенство **(176—184)**:

176 а) $\log_{0,5}(3-2x) > -\log_{0,5}3$; б) $\log_2(2x-5) < -\log_2 3$.

177 а) $3\log_8(3x+2) < 2$; б) $4\log_{16}(4x+3) < 3$;

в) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x) < 2$; г) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1) > 2$;

д) $\log_{0,5}(3-2x) > -\log_{0,5}3$; е) $\log_2(2x-5) < -\log_2 3$.

178 а) $\log_{0,4}(3,5-5x) > 2\log_{0,4}0,2 - 1$;

б) $1 + 2\log_2 0,3 > \log_2(1,5-3x)$.

179 а) $\log_{0,5}(2-7x) > -2$; б) $\log_2(0,5-3x) < -3$.

180 а) $\log_{\sqrt{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant 4$; б) $\log_{\sqrt{6}}(7^{x+1} - 49^x) \leqslant 2$;

в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2} - 4^x) \geqslant -2$.

181 $\log_2 x + \log_2(x+1) < \log_2(2x+6)$.

182 (МГУ, почв. ф-т). $\frac{1}{2}\log_3 x^2 \geqslant \frac{1}{3}\log_3(-x^3)$.

183 (МГУ, физ. ф-т). $\log_3(x^3+x^2-2x) - 2\log_9(x^2-x) < \log_3 5$.

184 (МГУ, геогр. ф-т). $\log_{(\sqrt{31}-\sqrt{21})}(x^2-9) \geqslant 0$.

Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(185—189)**:

185 а) $\operatorname{tg} 3x > 0$; б) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < 1$; в) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} 2x \leqslant 0$; д) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant -1$.

186 а) $5\sin x - \sin 2x > 0$; б) $5\cos x + \sin 2x < 0$.

187 (МГУ, ИСАиА). $2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

188 (МГУ, геол. ф-т)
а) $16\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leqslant 7$; б) $16\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x \leqslant 15$.

189 (МГУ, ВМиК). а) $\sqrt{6-10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$;
б) $\sqrt{6\cos x - \sin x + 4} < \sin x + \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

Неравенства с модулями

Решите неравенство **(190—193)**:

190 а) $2x > |x| + 1$; б) $x^2 - 6 \geqslant |x|$.

191 (МГУ, биол. ф-т). а) $\frac{4}{|x+2|} \geqslant 3 - x$; б) $\frac{3}{|x-1|} \geqslant 2x + 5$.

192 (МГУ, социол. ф-т)
а) $\frac{4|2-x|}{4|x|} - |x-2| \leqslant 0$; б) $|1-x| + \frac{4|x-1|}{|x|-3} \geqslant 0$.

193 (МГУ, экон. ф-т). $|x^2 - 8x + 15| \leqslant |15 - x^2|$.

Разные неравенства

Решите неравенство **(194—220)**:

194 (МГТУ). а) $\frac{4^{\frac{1}{x}} - 4}{2+x} < 0$; б) $\frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{x-2} > 0$; в) $\frac{2^{-\frac{1}{x}} - 2}{x+2} < 0$.

195 а) $\dfrac{15-|7x+8|}{3x^2-14x+17}>0$; б) $\dfrac{13-|6x+7|}{5x^2-11x+7}>0$;

в) $\dfrac{18-|4x+5|}{4x^2-13x+11}>0$; г) $\dfrac{17-|11x+6|}{6x^2-15x+10}>0$.

196 а) $(x^2-9)\sqrt{x+6}>0$; б) $(16-x^2)\sqrt{8-x}<0$;

в) $\sqrt{x^2-9}\,(x+8)>0$; г) $(x-4)\sqrt{x^2-4}<0$.

197 а) $(x-2)(x-3)\sqrt{x-1}\leqslant 0$; б) $(x+2)(x+3)\sqrt{x+11}\leqslant 0$;

в) $(x-4)(x+3)\sqrt{x}\geqslant 0$; г) $(x-8)(x+7)\sqrt{x}\geqslant 0$.

198 (МГУ, почв. ф-т). $\sqrt[5]{y^5}\geqslant\sqrt[4]{y^4}$.

199 (МГТУ)

а) $\dfrac{\sqrt{6+5x-x^2}}{x-2}<0$; б) $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2}<0$; в) $\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3}>0$;

г) $\dfrac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$; д) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{2-x-x^2}}>0$; е) $\dfrac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}<0$.

200 а) $\dfrac{(2x-5)(32^{\frac{1}{x}}-4)}{(3^x-8)(x^4+4x+20)}\geqslant 0$; б) $\dfrac{(2x-3)(27^{\frac{1}{x}}-9)}{(2^x-5)(x^4-2x+10)}\leqslant 0$.

201 (МГУ, геол. ф-т). а) $\dfrac{|x-3|+2}{|2x-3|-5}\leqslant 0$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}}\geqslant 0$.

202 (МИФИ)

а) $(9x^2-9x+2)\cdot\log_2 3x\geqslant 0$; б) $(20x-25x^2-3)\cdot\log_3 5x\leqslant 0$.

203 а) (МГУ, ИСАиА). $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{6+3\sqrt{3}x-2x^2}\geqslant 0$;

б) (МГУ, биол. ф-т). $\dfrac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7}\geqslant 0$.

204 а) $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13}\geqslant 0$; б) $\dfrac{x-11+5\sqrt{7-x}}{|x-1|-\sqrt{x+1}}\leqslant 0$;

в) $\dfrac{|x-5|-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{11-x}+x-12}\geqslant 0$; г) $\dfrac{x+2-7\sqrt{6-x}}{|x-3|-\sqrt{x+3}}\leqslant 0$.

205 (ВШЭ). а) $\dfrac{|x+6|+\sqrt{1-x}-5}{|x-2|-3\sqrt{x+5}+3}\leqslant 0$; б) $\dfrac{|x-3|-2\sqrt{x+4}+1}{|x+5|-2\sqrt{2-x}+1}\leqslant 0$;

в) $\dfrac{|x+4|-\sqrt{3-x}-1}{|x-4|-\sqrt{x+3}-1}\leqslant 0$; г) $\dfrac{|x-5|-2\sqrt{x+2}+1}{|x+3|-2\sqrt{4-x}+1}\leqslant 0$.

206 а) $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$; б) $3^x + 3^{|x|} \leqslant 3$.

207 (МГУ, почв. ф-т)

а) $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$; б) $2 \cdot 9^{\sqrt{3-x}} + 2 < 5 \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

208 (ГУУ). а) $\dfrac{\lg(8-x)}{\lg(x-2)^2} \leqslant 1$; б) $\dfrac{\lg(2x+9)}{\lg(2x+3)^2} \leqslant 1$;

в) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{2}+9\right)}{\lg\left(\frac{x}{2}+3\right)^2} \leqslant 1$; г) $\dfrac{\lg\left(\frac{x}{3}+5\right)}{\lg\left(\frac{x}{3}-1\right)^2} \leqslant 1$.

209 (МГИЭМ). а) $\dfrac{|3x+1|-7}{x+2} \geqslant -1$; б) $\dfrac{|6x+3|-11}{x-1} \leqslant 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{x+6}}{2x-3} < 1$; г) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$;

д) $-x^2 + x + 8 > 2|x+1|$; е) $-x^2 - 2x + 33 > 3|x-1|$.

210 (МГУ, физ. ф-т). а) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-x} \cdot 5^{\sqrt{-x}} > \dfrac{1}{25}$; б) $\dfrac{2^x + 5x + 8}{x-2} \leqslant 5$;

в) $\sqrt{2\log_9(3x^2-4)} > \log_3\sqrt{3x^2-4}$.

211 (МГУ, хим. ф-т)

а) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{2-x}{x}} - \dfrac{x+1}{2x}\right)^2} \geqslant 0$; б) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} - \dfrac{x+2}{2x+2}\right)^2} \geqslant 0$.

212 а) (МГУ, филол. ф-т). $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-1)} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}}x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x}$;

б) (МГУ, экон. ф-т). $\log_2(2^x - 3) \cdot \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32$.

213 (МГУ, ИСАиА). $(1 + \log_3 x)\sqrt{\log_{3x}\sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}} \leqslant 2$.

214 (МГУ, мехмат). а) $\dfrac{\log_{(24-2x-x^2)}(x+6)}{\log_{(4-x)}(24-2x-x^2)} < \dfrac{1}{4}$;

б) $27^x + 24 \geqslant 2(7+\sqrt{22})^x + 12(7-\sqrt{22})^x$;

в) $x \leqslant \log_5(16 \cdot 15^x - 15^{1+2x}) - \log_3(16 \cdot 5^x - 3^{1+x} \cdot 5^{1+2x})$.

215 (МГУ, хим. ф-т). $2^{\lg(x^2-1)} \geqslant (x+1)^{\lg 2}$.

216 (МГУ, биол. ф-т). $\dfrac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \leqslant 2.$

217 (МГУ, почв. ф-т). а) $\log_{(x-2)} x \leqslant \log_{(x-2)} 4;$

б) $2\log_\pi \sin x \cdot \log_\pi \sin 2x - \log_\pi^2 \sin 2x \leqslant \log_\pi^2 \sin x.$

218 (МГУ, геогр. ф-т). $|x - 6| + \sqrt{3x+1} \leqslant 5.$

219 (МГУ, псих. ф-т). $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3x+4}{4x+8} \leqslant 0.$

220 (МГУ, геогр. ф-т). $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{|x|} \geqslant 0.$

Системы уравнений и неравенств

Решите систему уравнений **(221—234)**:

221 (МИРЭА). а) $\begin{cases} x - 3y^2 = 8 \\ x + 4y^2 = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 5y^2 = 10 \\ x + 3y^2 = 18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 7y^2 = 9 \\ x + 2y^2 = 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y^2 = 12 \\ x + 7y^2 = 21. \end{cases}$

222 (МИРЭА). а) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 5. \end{cases}$

223 (МИСиС). $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + y = 57 \\ \dfrac{(x+y)^5 + (x-y)^5}{(x+y)^5 - (x-y)^5} = \dfrac{1025}{1023}. \end{cases}$

224 $\begin{cases} \left(\dfrac{x^2 - xy}{y^2 + xy} - \dfrac{(x-y)^2}{x^2 + xy}\right) \cdot \left(\dfrac{y^2}{x^3 - xy^2} - \dfrac{1}{x+y}\right)^{-1} \cdot (x-y)^{-2} = -\dfrac{x}{2} \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

225 $\begin{cases} \left(\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3 y} + \sqrt[4]{4xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}\right)^2 + xy + 3\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{xy} + 3}\right)^{-1} = 6 \\ 2x - y + \sqrt{xy} = 10. \end{cases}$

226 а) $\begin{cases} 4^{2y} + 3^{2x} = 82 \\ 3^x - 4^y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^y + 5^{2x} = 26 \\ 5^x - 3^{0,5y} = 4. \end{cases}$

227 а) $\begin{cases} 3^{x^2 - 2xy} = 1 \\ 2\log_3 (y+2) = \log_3 (5x - 2); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{y^2 - 3xy} = 1 \\ 2\log_2 (x+1) = \log_2 (3y - 5). \end{cases}$

228 а) $\begin{cases} 2^{y-3} = 8^{x-2} \\ 2\log_3(y-x) - \log_3 x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{y} = 4^{x-3} \\ 2\log_2(x-y) - \log_2 y = 1. \end{cases}$

229 (МГУ, ФНМ). а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3x}{2}} + \log_3^3 y = 504 \\ 4^x - 2^{x-1}\log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3x}{2}} + \log_2^3 y = 702 \\ 9^x - 3^{x-1}\log_{\sqrt[3]{2}} y + \log_2^2 y = 117. \end{cases}$

230 $\begin{cases} |x+y| + \log_2^2(|x| - y + 5) - 12 = 0 \\ (x+y)^2 - 5(x+y)\cdot\log_2(|x| - y + 5) + 4\log_2^2(|x| - y + 5) = 0. \end{cases}$

231 (МГУ, ВМиК). а) $\begin{cases} \log_2\sqrt{y} = -3^{1-x} \\ 3^x + \log_2 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 0 \\ 6\cos x - 2\sin y = 7. \end{cases}$

232 (МГУ, физ. ф-т). $\begin{cases} \sin y\,|\sin y| = \dfrac{|\cos x|}{\cos x} \\ |\cos x - 1|^2 + |\sin y|^2 = 4. \end{cases}$

233 (МГУ, геол. ф-т). $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5 \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

234 (МГУ, геогр. ф-т). $\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y - 5\cdot 3^{y+x} = 3^x\cdot 5^y \\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$

235 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} \geqslant \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} \\ (1-x)^2 \leqslant (x+5)(x-1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{3 + \dfrac{15}{12-x}} - 8\sqrt{\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{51-3x}} > -2 \\ \sqrt{x^2 - 3x - 10} \leqslant 2x + 4. \end{cases}$

236 (МГУ, мехмат). Решите систему:

а) $\begin{cases} 2^{x+2} = \dfrac{49}{4}x^2 + 4 \\ 2^{x+2} - 4 \leqslant x^2(14 - 2^{x+2})\cdot 2^x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x+1} = \dfrac{49}{3}x^2 + 3 \\ 3^{x+1} - 3 \leqslant x^2(14 - 3^{x+1})\cdot 3^x. \end{cases}$

237 (МГУ, псих. ф-т). Решите систему:

а) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \geqslant 0 \\ \cos x \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2} \\ \sin x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Задачи с параметрами

238 (МИФИ). При каких значениях $c \in \boldsymbol{R}$ для действительных корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + (4c - c^2 - 1)x + 2c^2 - 1 = 0$ выполняется равенство $x_1 + x_2 = 6$?

239 а) Постройте график квадратного трехчлена $y = x^2 + 3x + a$, если известно, что его корни связаны соотношением $x_1^2 + x_2^2 = 5$.
б) Постройте график квадратного трехчлена $y = x^2 - x - a$, если известно, что его корни связаны соотношением $x_1^3 + x_2^3 = 4$.

240 (ВШЭ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:
а) $2|x + 1| - 2|x - 2| + |x - 6| = x + 3a$ имеет ровно один корень;
б) $2|x + 3| - 2|x - 2| + |x - 4| = x + 2a$ имеет ровно два корня;
в) $|x^2 - 8x - a| = 4x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 11,5;
г) $|x^2 - 4x + a| = x$ имеет ровно один корень, меньший 1, и хотя бы один корень, больший 4.

241 (ВШЭ). Для каждого значения параметра b найдите число корней уравнения:
а) $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$; б) $6x^2 + 18x + |12x + 36| = b$;
в) $4x^2 + 12x + |8x + 24| = b$; г) $4x^2 + 8x + |24x + 48| = b$.

242 (МИФИ). Для каждого значения параметра c решите уравнение:
а) $\sqrt{\dfrac{x}{4} + 2} = c + \sqrt{\dfrac{x}{4} - 3}$;
б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = c - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$;
в) $\sin\left(c\sqrt{x - 1} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$;
г) $(2^{-x} + 4 + 3c)(5 - c - 2^{-x}) = 0$.

243 (МИФИ). При каких значениях параметра b уравнение $|2\cos x - 4b + 3| = |3\cos x - b|$ имеет на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ только одно решение?

244 (МИФИ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x-1=\sqrt{(1-a)x-1+3a+2a^2}$ на промежутке $(-\infty;\,5]$ имеет только одно решение.

245 (МГТУ). Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $8+4p(x-2)=(x-|x|)x$ имеет единственное решение. Найдите все решения при каждом p.

246 (ИКСИ АФСБ). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $144^{-|2x-1|}-2\cdot 12^{-|2x-1|}+12a=0$ имеет хотя бы один корень.

Для каждого значения параметра a решите неравенство **(247—248)**:

247 (МГУ, ВМиК). $|2x+a|\leqslant x+2$.

248 (МГУ, физ. ф-т). $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

249 (МГУ, хим. ф-т). Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x-2a(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)+$ $+\cos x-\cos 3x+2a^2=0$.

250 (МГУ, геол. ф-т). При каких значениях параметра $a\geqslant 1$ уравнение $\sin\left(\frac{4}{13}x\right)\operatorname{tg}x=0$ имеет ровно 6 различных корней на отрезке $[2a\pi;\,(a^2+1)\pi]$? Укажите эти корни.

251 При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$?

252 (МГУ, мехмат). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}ax^2-2(a+1)x+a+5\leqslant 0\\(a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\geqslant 0\end{cases}$ имеет единственное решение.

253 (МГУ, хим. ф-т). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geqslant 0\\x^3-(a+3)x^2+3ax\leqslant 0\end{cases}$ имеет единственное решение.

254 (МГУ, биол. ф-т). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sin x=\cos\left(\sqrt{6-2a^2x}\right)\\\cos x=\left(a-\frac{2}{3}\right)\sin\left(\sqrt{6-2a^2x}\right)\end{cases}$ имеет ровно одно решение на отрезке $[0;\,2\pi]$.

Текстовые задачи

255 (МГУ, почв. ф-т). а) Сумма десяти чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма кубов этих чисел?
б) Сумма двенадцати чисел равна нулю, и сумма их попарных произведений равна нулю. Чему равна сумма четвертых степеней этих чисел?

256 **Старинная задача.** У торговца имеется два бочонка вина: емкостью 40 л, ценою 7 р. за литр, и емкостью 10 л, ценою 5 р. за литр. По какому одинаковому количеству вина надо взять из каждого бочонка и перелить в другой бочонок, чтобы цена вина за литр в двух бочонках сравнялась?

257 Решите предыдущую задачу, если известно, что цены вина за литр различны, но неизвестны.

258 У торговца имеется два бочонка вина разной цены за литр емкостью m л и n л. По какому одинаковому количеству вина надо взять из каждого бочонка и перелить в другой бочонок, чтобы цена вина за литр в двух бочонках сравнялась?

259 Имеются две бочки бензина разной цены. В одной бочке находится 220 л бензина, а в другой — 180 л. Из каждой бочки берут по одинаковому количеству литров бензина и переливают в другую, после чего цена литра бензина в бочках стала одинаковой. По скольку литров бензина перелили из каждой бочки?

260 Имеются два сосуда, содержащие растворы кислоты разной концентрации. В первом m л раствора, во втором n л раствора. Из каждого сосуда взяли по одинаковому количеству раствора и перелили в другой сосуд, после чего концентрация кислоты в растворах сравнялась. По скольку литров раствора перелили из каждого сосуда? Решите задачу в общем виде. Получите ответ, если: а) $m = 20$, $n = 30$; б) $m = 10$, $n = 30$.

261 (МГУ, почв. ф-т). а) Какое количество воды надо добавить в 1 литр 10%-ного водного раствора спирта, чтобы получить 6%-ный раствор?
б) Имеется 1 литр 6%-ного раствора спирта. Сколько литров 3%-ного раствора спирта нужно добавить в первый раствор, чтобы получить 5%-ный раствор?

262 а) Из пункта A выехал колесный трактор со скоростью 25 км/ч. Через час вслед за ним одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость грузовика постоянна и составляет $\frac{3}{4}$ скорости легкового автомобиля. Найдите скорость грузовика, если известно, что он догнал трактор на 10 мин позже, чем легковой автомобиль.

б) От пристани по водохранилищу со скоростью 10 км/ч начала двигаться яхта. Спустя полтора часа от той же пристани за яхтой последовали два катера с постоянными скоростями, причем скорость первого катера составляла $\frac{4}{3}$ скорости второго. Найдите скорость первого катера, если известно, что он догнал яхту на 15 мин раньше, чем второй.

263 а) Из пункта A в одном направлении одновременно отправились пешеход и велосипедист. Через 2 ч вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист, скорость которого равна 30 км/ч. Найдите скорость пешехода, если она постоянна и составляет $\frac{2}{5}$ скорости велосипедиста и мотоциклист догнал пешехода на 1,5 ч раньше, чем велосипедиста.

б) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $\frac{6}{5}$ скорости грузовика. Через 30 мин вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на 1 ч раньше, чем легковой автомобиль.

264 а) В озеро впадают две реки. На первой реке, в 35 км от устья, расположен пункт A. На второй реке, в 60 км от устья, расположен пункт C. Расстояние между устьями рек 15 км. Моторная лодка прошла путь от A до C за 10 ч 25 мин, а обратно за 8 ч 45 мин. Какова скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения во второй реке в 1,5 раза больше скорости течения в первой реке?

б) Из порта вышли два корабля. Они двигаются с постоянной скоростью, причем первый в 2 раза быстрее второго. Через некоторое время от второго корабля отошел быстроходный катер, догнал первый корабль и возвратился обратно, затратив на путь в оба конца 5 ч. Затем он снова догнал первый корабль и возвратился, затратив всего 9 ч. Сколько времени догонял катер первый корабль в свой первый рейс?

265 В озеро впадают две реки. Теплоход выходит из порта M на первой реке, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро (где нет течения) и по второй реке вверх (против течения) до порта N. Затем теплоход возвращается обратно. Скорость теплохода в озере равна v, скорость течения первой реки v_1, второй реки v_2, время движения теплохода от M до N равно t, а длина пути от M до N равна s. Время обратного движения от N до M также равно t. Какое расстояние теплоход идет по озеру в одном направлении?

266 (МГУ, биол. ф-т). а) Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, второй из точки B — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только первая и пятнадцатая состоялись в точке B. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.
б) Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы: первый из точки A, второй из точки B — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 13 встреч на трассе после старта только третья и тринадцатая состоялись в точке A. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

267 а) Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находился перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C — перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда гонщик B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин гонщик A впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 мин меньше, чем гонщик C. Сколько времени тратит на круг гонщик A?
б) Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющего форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной точке старта, а через полчаса после этого он вторично (не считая момента старта) обогнал третьего гонщика. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее чем за 20 мин?

268 (МГУ, ФНМ). а) Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход $П_1$, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход $П_2$. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и $П_2$ некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а $П_2$ уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и $П_2$, одновременно пришли оба пешехода. Найдите скорость пешехода $П_1$.
б) Из города в деревню одновременно выехали велосипедист В и мотоциклист $М_1$, а в тот же момент из деревни в город выехал второй мотоциклист $М_2$. Скорости $М_1$ и $М_2$ были равны 30 км/ч.

Встретившись, В и M_2 некоторое время стояли на месте, а затем оба направились в деревню. При этом В поехал с прежней скоростью, а M_2 уменьшил свою скорость в три раза. В результате M_1 и M_2 прибыли в деревню одновременно, а через промежуток времени, в десять раз больший длительности встречи Б и M_2, в деревню приехал В. Найдите скорость велосипедиста В.

Список принятых сокращений

ВШЭ — Высшая школа экономики
ГУУ — Государственный университет управления
ИКСИ АФСБ — Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ
МГИЭМ — Московский государственный институт электроники и математики
МГИЭТ — Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
МГТУ — Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
МГУ — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова:
биол. ф-т — биологический факультет
ВМиК — факультет вычислительной математики и кибернетики
геогр. ф-т — географический факультет
геол. ф-т — геологический факультет
ИСАиА — институт стран Азии и Африки
мехмат — механико-математический факультет
почв. ф-т — факультет почвоведения
псих. ф-т — факультет психологии
социол. ф-т — социологический факультет
физ. ф-т — физический факультет
филол. ф-т — филологический факультет
хим. ф-т — химический факультет
ФНМ — факультет наук о материалах
экон. ф-т — экономический факультет
МГУЭСИ — Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
МИРЭА — Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
МИСиС — Московский государственный институт стали и сплавов (технологический университет)
МИФИ — Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет)
МПГУ — Московский педагогический государственный университет
МФТИ — Московский физико-технический институт (государственный университет)
МЭИ — Московский энергетический институт
РЭА — Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова
СПбГПУ — Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Приложения

1. Таблица производных

1. $(C)' = 0$.
2. $(x)' = 1$ $(x \in \boldsymbol{R})$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, 5, \ldots, x \in \boldsymbol{R})$.
4. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ $(n \in \boldsymbol{N}, x \neq 0)$.
5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — нецелое число, $x > 0$)
6. $(e^x)' = e^x$ $(x \in \boldsymbol{R})$.
7. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1, x \in \boldsymbol{R})$.
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.
9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$.
10. $(\sin x)' = \cos x$ $(x \in \boldsymbol{R})$.
11. $(\cos x)' = -\sin x$ $(x \in \boldsymbol{R})$.
12. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\right)$.
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq \pi k, k \in \boldsymbol{Z})$.
14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \boldsymbol{R})$.
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ $(x \in \boldsymbol{R})$.

После каждой формулы указаны параметры ее применения. Отметим, что формулы 2—5 часто объединяют в одну:

$$(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1} \ (\beta \neq 0),$$

но применяется она для каждого конкретного случая для тех значений x, которые указаны в скобках после каждой из формул 2—5.

2. Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C.$
2. $\int 1\,dx = x + C\ (x \in \boldsymbol{R}).$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \in \boldsymbol{N},\ x \in \boldsymbol{R}).$
4. $\int x^{-n} dx = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ x \neq 0).$
5. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha$ — нецелое число, $x > 0).$
6. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C\ (x \neq 0).$
7. $\int e^x dx = e^x + C\ (x \in \boldsymbol{R}).$
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \boldsymbol{R}).$
9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C\ (x \in \boldsymbol{R}).$
10. $\int \cos x\,dx = \sin x + C\ (x \in \boldsymbol{R}).$
11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right).$
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C\ (x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}).$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C\ (-1 < x < 1).$
14. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C\ (x \in \boldsymbol{R}).$

После каждой формулы указаны параметры ее применения. Отметим, что формулы 2—5 часто объединяют в одну:

$$\int x^{\beta} dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C\ (\beta \neq -1),$$

но применяется она для каждого конкретного случая для тех значений x, которые указаны в скобках после каждой из формул 2—5.

3. Свойства логарифмов

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, $\gamma \in \boldsymbol{R}$, то:

1. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$
2. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$
3. $\log_a M^{\gamma} = \gamma \log_a M.$
4. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}.$

4. Основные формулы тригонометрии

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
3. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
4. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
5. $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.
6. $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
7. $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
8. $\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
9. $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$.
10. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
11. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
12. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
13. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
14. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
15. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
16. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
17. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
18. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
19. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
2. $\sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
3. $\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
4. $\sin x = a,\ |a| < 1,\ a \neq 0$,
   $x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$,
   $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
5. $\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
6. $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
7. $\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
8. $\cos x = a,\ |a| < 1,\ a \neq 0$,
   $x_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$,
   $x_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
9. $\operatorname{tg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R}$,
   $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
10. $\operatorname{ctg} x = a,\ a \in \boldsymbol{R}$,
    $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Предметный указатель

А

Амплитуда колебаний 210
аргумент 3
асимптота 149, 150
— вертикальная 152
— горизонтальная 151
— наклонная 151

В

Возведение неравенства в степень 220
— уравнения в степень 215

Г

Геометрический смысл второй производной 138
— — определенного интеграла 179
— — производной 94
график, выпуклый вверх 138
— — вниз 138
график функции 19
— — разрывный 60

Д

Движение равномерное 135
— равноускоренное 135
дифференциал аргумента 99
— функции 99
дифференцирование функции 92
дифференциальное уравнение 202
— — второго порядка 202
— — первого порядка 202
— — с разделяющимися переменными 204

И

Интегральная сумма 176
— — нижняя (верхняя) 182
исследование функции 18

К

Комплексная плоскость 386
комплексного числа аргумент 391
— — главный аргумент 390
— — действительная часть 380
— — мнимая часть 380
— — модуль 386
— — n-я степень 381

Л

Логарифмирование показательного уравнения 215
— уравнения 273
— показательного неравенства 221

М

Максимум функции на отрезке 114
мгновенная скорость 90
метод подстановки 173
— промежутков 307
— трапеций 182
механический смысл производной 94
— — второй производной 135
минимум функции на отрезке 114
мнимая единица 380

Н

Наибольшее значение функции 6
наименьшее значение функции 6
неопределенный интеграл 168

неравенства равносильные 219
— — на множестве 283
— с параметрами 355
неравенство, равносильное системе 242
— — совокупности систем 242

О

Область изменения функции 5
— определения функции 3
— существования функции 5
определенный интеграл 179
освобождение уравнения от знаменателя 226

П

Параметр 357
первообразная 167
период функции 9
— — главный 9
площадь криволинейной трапеции 176
посторонние корни 225
потенцирование логарифмического уравнения 226, 273
предел замечательный первый 52
— — второй 52
предел функции 46, 47, 52, 53
приведение подобных членов 226
приращение аргумента 60, 91
— функции 60, 91
производная 92
— вторая 134
— левая (правая) 92
— обратной функции 111
— сложной функции 108
промежуток знакопостоянства функции 16

Р

Равносильное преобразование неравенства 220
— — уравнения 214
равносильный переход на множестве 266, 283
разрыв неустранимый 70
— устранимый 70
решение дифференциального уравнения 202
— — — общее 202
— — — частное 202
— системы 242, 331
ряд Тейлора 166

С

Свойство графиков взаимно обратных функций 76
система-следствие 337
системы равносильные 242
суперпозиция двух функций 4

Т

Теорема Лагранжа 127
— Ролля 127
точка критическая 118
— локального максимума 115
— — минимума 115
— — экстремума 115
точка максимума 114
— минимума 114
— перегиба 139
трапеция криволинейная 175

У

Угол наклона касательной 94
уравнение иррациональное 229
— равносильное системе 242
— — совокупности систем 242
— с параметрами 355
уравнение-следствие 225
уравнения равносильные 214
— — на множестве 266

Ф

Фаза колебаний 210
форма комплексного числа алгебраическая 380
— — — показательная 407
— — — тригонометрическая 392

формула Муавра 393
— Ньютона—Лейбница 185
— Тейлора 162, 163
— Эйлера 405
функции взаимно обратные 75
— основные обратные тригонометрические 84
— — элементарные 4
— элементарные 4
функция 3
— возрастающая 14
— дробно-линейная 154
— монотонная 16
— невозрастающая 15
— непрерывная в точке 61, 63
— — на отрезке 63
— — на промежутке 19
— — справа (слева) в точке 63
— неубывающая 15
— нечетная 8
— обратная 72, 75
— ограниченная 6
— — сверху (снизу) 6
— периодическая 9
— разрывная в точке 61
— сложная 4
— строго монотонная 15
— убывающая 14
— четная 8

Ч

Частота колебаний 210
числа комплексные взаимно сопряженные 384
— мнимые 380
число комплексное 380
— обратное комплексному 382
— противоположное комплексному 381
— сопряженное с комплексным числом 384

Ответы

§ 1

1.2. а) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\lg x$. **1.3.** а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=x^3$. **1.4.** а) $f(\varphi(x))=7^{x^2}$; б) $\varphi(g(x))=(\log_5 x)^2$. **1.8.** а) $[1;+\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$, в) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; г) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; д) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; е) $(-\infty;-4)\cup(-4;-1]\cup[0;+\infty)$. **1.9.** а) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; б) $(0;+\infty)$; в) $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $[0;+\infty)$; д) $\boldsymbol{R}$; е) $\{-1;1\}$. **1.10.** а) $[0;1]$; б) $[0{,}5;1]$; в) $(0;1]$; г) $[3;5]$; д) $(1;\sqrt{2})$; е) $\boldsymbol{R}$; ж) $[1;2]$; з) $(-\infty;0]$. **1.18.** а) Нечетная; б) нечетная. **1.19.** а) Четная; б) четная. **1.20.** а) Четная; б) нечетная. **1.29.** а) $\sin 2x$, $\cos x$, $\sin 2\pi x$; б) функция Дирихле. **1.32.** а) Да, $T=\pi$; в) да, $T=\pi$; г) да, $T=\pi$, е) нет; ж) нет. **1.33.** а) Да, $T=\pi$; б) да, $T=\pi$; в) да, $T=\pi$; г) да, $T=\pi$; д) нет; е) да, $T=2\pi$; ж) нет; з) нет. **1.34.** а) Нет; б) да, $T=1$; в) да, $T=1$; г) да, $T=2$; д) да, $T=2$; е) да, $T=4$. **1.35.** а) Да, $T=2\pi$; б) да, $T=2\pi$. **1.36.** а) 2π; б) $\frac{\pi}{6}$; в) π; г) π. **1.47.** в) Функция убывает на промежутке $(-\infty;1{,}25]$; г) функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$, $k\in\boldsymbol{Z}$, убывает на промежутках $\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **1.48.** а) Функция возрастает на промежутках $[k;k+1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; б) функция возрастает на $\boldsymbol{R}$; в) функция убывает на промежутке $(-\infty;-4]$, постоянная на промежутке $[-4;4]$, возрастает на промежутке $[4;+\infty)$. **1.49.** а) $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(-2;2)$; б) $y>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(0;4)$; в) $y>0$ при $x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(1;4)$; ж) $y>0$ при $x\in(-\infty;-7)\cup(-3;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(-7;-3)$; з) $y>0$ при $x\in(0;2)$; $y<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; и) $y>0$ при $x\in(0;4)$; $y<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **1.50.** а) На промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ функция монотонна (постоянна), $y<0$ при $x\in(-\infty;0)$, $y>0$ при $x\in(0;+\infty)$; б) на промежутках $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$ и $(0;+\infty)$ функция монотонна (постоянна), $y<0$ при $x\in(-2;2)$, $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **1.74.** а) $y=2x^2$; б) $y=-2x^2$; в) $x=2y^2$; г) $x=-2y^2$; д) $y=2(x-1)^2+1$; е) $y=-2(x-1)^2+2$.

§ 2

2.4. а) 8; б) 1; в) -1; г) 4. **2.5.** а) ∞; б) ∞; в) ∞; г) ∞; д) ∞; е) ∞. **2.6.** а) 1 и 1; б) 4 и 4; в) 0 и 0; г) 0 и 0. **2.7.** а) $-\infty$ и $+\infty$; б) $+\infty$ и $+\infty$; в) $-\infty$ и $-\infty$; г) $-\infty$ и $+\infty$. **2.8.** а) $-\infty$ и $+\infty$; б) $+\infty$ и $-\infty$; в) $-\infty$ и $+\infty$; г) $-\infty$ и $+\infty$. **2.12.** а) 1; б) 1; в) 1. **2.15.** а) 1; б) 1; в) 3; г) 1; д) 2; е) e^3. **2.17.** а) $\frac{1}{7}$; б) 7; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{5}$; д) 1;

е) $\frac{3}{2}$; ж) 1; з) 5; и) $\frac{2}{5}$. **2.18.** а) e^3; б) $e^{\frac{1}{3}}$; в) $e^{\frac{2}{5}}$; г) $e^{-\frac{1}{2}}$. **2.19.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $+\infty$; г) $-\infty$; д) 12; е) $-\frac{4}{3}$. **2.22.** а) 0,2; б) –0,4; в) 0,2; г) 0,02. **2.24.** а) 0,01; б) 0,21; в) –0,19; г) 0,41. **2.32.** а) $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$; в) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$; д) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **2.34.** а) $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$; б) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$; в) $(-1;\ +\infty)$. **2.41.** а) Да, $f(x) = \begin{cases} x - 4,\ x \neq 1 \\ -3,\ x_0 = 1; \end{cases}$ б) да, $f(x) = \begin{cases} x - 2,\ x \neq -2 \\ -4,\ x_0 = -2; \end{cases}$ в) нет; г) нет.

§ 3

3.3. а) $y = \frac{x-1}{3}$; б) $y = \frac{x+8}{2}$; в) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0;\ 9]$; г) $y = \sqrt{-x}$, $x \in [-9;\ 0]$; д) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$; е) $y = 4x^2$, $x \in [0;\ 2{,}5]$; ж) $y = \log_3 x$; з) $y = 5^x$, $x \in (-\infty;\ 2)$. **3.7.** а) $y = \sqrt[4]{x}$, $x \in [0;\ +\infty)$; в) $y = \sqrt[2m]{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$; е) $y = \log_a x$, $x \in (0;\ +\infty)$. **3.11.** $y = 5 - x$. **3.12.** а) $[f(a);\ f(b)]$; б) $[f(b);\ f(a)]$. **3.22.** а) $-\frac{5}{13}$; б) $\frac{12}{13}$; в) 1.

§ 4

4.1. а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta s = 3$; в) $v_{ср} \approx 3$. **4.2.** а) $(2t + \Delta t)\Delta t$; б) $2t + \Delta t$, в) $2t$; г) 2. **4.3.** 2) а) $(2t - 6 + \Delta t)\Delta t$; б) $2t - 6 + \Delta t$; в) $2t - 6$, мгновенная скорость зависит от времени. **4.5.** а) $\Delta f = (2x + \Delta x)\Delta x$; б) $2x + \Delta x$; в) $2x$, г) 0; 2; –2; 4; –4. **4.7.** а) $2x$; б) 0; 2; –2; 4; –4; 6; –6; в) 0; 0,5; 1,5. **4.10.** а) $v = 2t - 4$; б) 6; в) при $t = 2$. **4.14.** а) –2; 4; б) $(-6;\ -2) \cup (4;\ 7)$; в) $(-2;\ 4)$. **4.17.** а) $2x + 1$; б) $2x - 1$; в) $2x$; г) $2x$; д) $10x$; е) $-2x$; ж) $10x + 3$; з) $6x - 3$; и) $2ax + b$. **4.18.** а) $3x^2 + 2x + 1$; б) $3x^2 - 2x - 1$; в) $15x$; г) $-3x$; д) $6x^2 - 6x + 1$; з) $3ax^2 + 2bx + c$. **4.19.** а) $2x + 6$; б) $2x - 8$; в) $18x + 6$. **4.20.** а) –2; б) 0; в) 1; г) 41. **4.21.** а) $y' = 0$ при $x = -3$; $y' > 0$ при $x \in (-3;\ +\infty)$; $y' < 0$ при $x \in (-\infty;\ -3)$; в) $y' = 0$ при $x = 3$; $y' > 0$ при $x \in (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$. **4.26.** а) $dy = 3dx$; б) $dy = (2x + 2)dx$; в) $dy = (3x^2 - 5)dx$. **4.27.** а) –0,3; б) 0,3; в) 0,02; г) –0,02. **4.30.** а) $3x^2 + 4x - 3$; в) $45x^2 + 2x$; д) $-12x^3 - 6x^2 + 12x + 4$. **4.31.** а) $4x^3$; б) $5x^4$; в) $6x^5$; г) $7x^6$. **4.33.** а) $\frac{-1}{x^2}$; б) $\frac{-2}{x^3}$; в) $\frac{-1}{(x+1)^2}$; г) $\frac{-2}{(x-1)^2}$; д) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; е) $\frac{-x^2-4}{x^2}$; ж) $\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$; з) $\frac{-x^2+16x+1}{(x^2+1)^2}$; и) $\frac{6x-21}{(x^2-7x+5)^2}$; **4.34.** а) 0; б) $-\frac{2}{9}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$. **4.35.** а) –1; 1; б) (–1; 1); в) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **4.36.** 10. **4.39.** а) $28x^3 - 15x^2 - 1$; б) $-4x^3 + 16x + 2$. **4.43.** а) $11^x \cdot \ln 11$; в) $(2 \cdot 4^x + 3 \cdot 8^x - 4 \cdot 16^x)\ln 2$. **4.45.** а) $\frac{1}{x \ln 2}$; б) $\frac{1}{x \ln 10}$; в) $\frac{4}{x \ln 2} + \frac{3}{x} - \frac{2}{x \ln 10}$;

г) $\frac{5}{x\ln 3}-\frac{6}{x}+\frac{7}{x\ln 10}$. **4.48.** а) $12x^{11}+12^x\ln 12$, $x\in\boldsymbol{R}$, в) $\frac{1}{x}+\sin x$, $x\in(0;+\infty)$. **4.50.** а) e; б) $(0;e)$; в) $(e;+\infty)$. **4.52.** а) $\pi^x\cdot\ln\pi+e^x$; б) $ex^{e-1}-\pi x^{\pi-1}$; в) $\pi^x\cdot\ln\pi+\pi x^{\pi-1}$; г) $ex^{e-1}-e^x$. **4.54.** а) $x\in\boldsymbol{R}$, $3x^2e^{x^3}$; д) $x\in\boldsymbol{R}$, $e^{\sin x}\cdot\cos x$. **4.55.** а) $x\in(0;+\infty)$, $\frac{-1}{2x\ln 2}$; б) $x\in(-\infty;0)$, $\frac{3}{2x\ln 2}$. **4.56.** а) $x\in\boldsymbol{R}$, $-2\sin 2x$; б) $x\in\boldsymbol{R}$, $-60\sin 30x-8\sin 4x$. **4.57.** в) $x\ne\frac{6+\pi+2\pi k}{4}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $\frac{2}{\cos^2(2x-3)}$; г) $x\ne\frac{\pi k}{5}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $\frac{5}{\sin^2 5x}$. **4.62.** а) $x\in(0;+\infty)$, $0{,}5x^{-0{,}5}$; в) $x\in\boldsymbol{R}$, $4{,}2x^{3{,}2}$. **4.63.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x>0$; б) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x\ne 0$; в) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ при $x\ne 0$; г) $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$ при $x\in(0;+\infty)$; е) $\frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ при $x\ne 0$; з) $\frac{-8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$ при $x\in(0;+\infty)$. Указание. б) При $x>0$ имеем: $(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; при $x<0$ имеем: $(\sqrt[3]{x})'=$ $=(-\sqrt[3]{-x})'=-\frac{(-x)'}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **4.64.** а) $x\in\boldsymbol{R}$, $\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+10}}$; в) $x\in(-\infty;1)\cup$ $\cup(2;+\infty)$, $\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$; д) $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$. **4.65.** а) $x\in\boldsymbol{R}$, $4\cos 2x$; б) $x\in\boldsymbol{R}$, $-6\sin 6x$, в) $x\ne\frac{\pi}{4000}+\frac{\pi k}{2000}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $\frac{2000}{\cos^2 2000x}$; г) $x\in\boldsymbol{R}$, 0. **4.67.** а) $f'(1)=-20$, $f'(3)=20$; б) $f'(-6)=f'(-4)=21$; в) $f'(5)=-200$, $f'(6)=200$. **4.68.** а) $x^x(\ln x+1)$; б) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$; в) $x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x\right)$. **4.72.** $-\frac{1}{1+x^2}$. **4.73.** а) $\frac{-\pi}{\sqrt{1-\pi^2x^2}}$; б) $\frac{3x^2}{1+x^6}$; в) $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; г) $\frac{-15(\operatorname{arcctg}3x)^4}{1+9x^2}$; д) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; е) $\frac{20(\arcsin 4x)^4}{\sqrt{1-16x^2}}$.

§ 5

5.6. а) 0; 1; б) –1; 1. **5.7.** а) 0; б) 0; в) 4; г) 1. **5.8.** а) 0; б) 1; в) $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$. **5.9.** а) –1; 0; 1; б) 1; в) e; г) 0. **5.10.** а) 0 и –4; б) 14 и –4. **5.11.** а) 1 и –3; б) –3 и 3. **5.13.** а) –1 и $2\ln 2-4$; б) $4-2\ln 2$ и 1. **5.14.** а) 0 и –4; б) $\max\limits_{(-2;\,2)}f(x)=0$, минимум функции на интервале $(-2;2)$ не достигается; в) 0 и –4; г) 0 и –4. **5.15.** а) 1 и 0; б) $\min\limits_{(-1;\,1)}f(x)=0$, максимум

функции на интервале $(-1; 1)$ не достигается. **5.16.** а) При $a = -1{,}5$ и $a = 2{,}5$; б) при $a = -0{,}5$ и $a = 1{,}5$; в) при $a = 0{,}5$. **5.17.** а) $x_{15} = -27{,}5$ — наименьший член последовательности; б) $x_{20} = -105$ — наименьший член последовательности. **5.19.** а) $y = 0$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = 4x - 4$; г) $y = -2x - 1$. **5.20.** а) $y = 2x - 3$; б) $y = 4x - 4$; в) $y = -4$; г) $y = -2x - 7$. **5.22.** а) $y = x$; б) $y = 1$; в) $y = -1$; г) $y = \pi - x$. **5.24.** а) $y = x$; б) $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$; в) $y = 2x + \frac{\pi}{2} - 1$; г) $y = \frac{4}{3}x - \frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}$. **5.26.** а) $y = x - 1$; б) $y = \frac{1}{2}x - 1 + \ln 2$; в) $y = \frac{1}{3}x - 1 + \ln 3$; г) $y = \frac{x}{e}$. **5.27.** а) $y = \frac{x-1}{\ln 2}$; б) $y = \frac{x-2}{2\ln 2} + 1$; в) $y = \frac{x-4}{4\ln 2} + 2$; г) $y = \frac{x-8}{8\ln 2} + 3$. **5.28.** а) $y = \frac{(x+1)\ln 2 + 1}{2}$; б) $y = x\ln 2 + 1$; в) $y = 4(x-2) \times \ln 2 + 4$; г) $y = 8(x-3)\ln 2 + 8$. **5.29.** а) $y = \frac{x+3}{e^2}$; б) $y = \frac{x+2}{e}$; в) $y = x$; г) $y = e^2(x-1)$. **5.30.** а) $y = -\frac{1}{2}x + 6$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\sqrt{2}$; в) $y = -x + 2$; г) $y = x - 3$. **5.31.** а) В точке $x = -2$; б) в точках $x = 2$ и $x = 6$. **5.32.** а) В точках $x = 1$ и $x = -2$, под углом $\operatorname{arctg} 3$; в) в точке $x = 6$, под углом $\operatorname{arctg} 73$. **5.33.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 4$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 5$. **5.34.** а) $y = e^e(x - e + 1)$; б) $e^e(x - e + 1)$. **5.35.** а) $y = -2x + 1$; б) $y = 4x - 8$. **5.36.** а) При $a = -3$; б) при $a = -5$. **5.38.** а) 25,1; б) 26,73; в) 4,01; г) 1,00; д) 3,94. **5.39.** а) 25,1; в) 26,7; д) 5,998; ж) 5,99; з) 1,1; и) 1,2; к) 0,6. **5.40.** а) 1,005; в) 0,995. **5.41.** а) 1,1; б) 0,8; д) 0,990; е) 1,03. **5.42.** а) 0,0175; г) 0,4848; д) $-0{,}0175$; ж) 0,515. **5.43.** а) 1,07. **5.47.** а) 1; б) -1; в) $3\sqrt{3}$; г) $-3\sqrt{3}$. **5.57.** в) Критическая точка $x = 1$; $(0; 1]$ — промежуток убывания, $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. **5.58.** а) $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$ — промежутки непрерывности функции, $[-1; 1]$ — промежуток возрастания, $(-\infty; -2)$, $(-2; -1]$, $[1; 2)$, $(2; +\infty)$ — промежутки убывания; в) $(0; +\infty)$ — промежуток непрерывности функции, $(0; 0{,}5]$ — промежуток убывания, $[0{,}5; +\infty)$ — промежуток возрастания. **5.60.** а) $-\sqrt{5}$ — точка локального минимума, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения $-\frac{\sqrt{5}}{10}$, $\sqrt{5}$ — точка локального максимума, в этой точке функция достигает своего наибольшего значения $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **5.64.** а) $v(t) = 10t - 10$, $a(t) = 10$; $v(0) = -10$, $a(0) = 10$; $v(t) = 0$ при $t = 1$. **5.65.** а) $v(0) = 8$ м/с, $a(0) = 0{,}5$ м/с^2. **5.68.** а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) e^x. **5.69.** $f^{(n)}(x) = a_n \cdot n!$; $f^{(n-1)}(x) = a_n \cdot x \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)!$. **5.70.** а) $n!$; б) e^x; в) $3^x(\ln 3)^n$. **5.71.** $\frac{m!(x+a)^{m-n}}{n!}$. **5.76.** а) $(-\infty; -1)$ — промежуток выпуклости вверх, $(-1; +\infty)$ — промежуток выпуклости вниз графика функции,

$x = -1$ — точка перегиба; и) $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости вверх, $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости вниз графика функции, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — точки перегиба; л) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости ввех, $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости вниз графика функции, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — точки перегиба. **5.77.** Нет, например, для функции $f(x) = x^4$ вторая производная равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой перегиба графика функции. **5.78.** а) $(-1;\ 1)$ — промежуток выпуклости вверх, $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ — промежутки выпуклости вниз графика функции, точек перегиба нет; б) $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости вверх, промежутков выпуклости вниз и точек перегиба нет; в) $\left(\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — промежутки выпуклости вниз графика функции, промежутков выпуклости вверх и точек перегиба нет. **5.82.** а) $y_{\min} = 4$; б) $y_{\max} = -4$; в) $y_{\max} = \frac{3}{2}$; г) $y_{\min} = \frac{3}{2}$. **5.83.** а) $y_{\max} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{\min} = 0$; б) $y_{\max} = \pi$, $y_{\min} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.84.** а) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = \frac{3}{4}$; б) $y_{\max} = \frac{5}{4}$, $y_{\min} = 1$. **5.85.** а) $y_{\max} = 6$, $y_{\min} = \frac{7 - 5\sqrt{2}}{2}$; б) $y_{\max} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}$, $y_{\min} = 6$. **5.86.** Если $a < -1$, то $y_{\min} = -1 - a$; если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $y_{\min} = 0$; если $a > 1$, то $y_{\min} = -1 + a$. **5.87.** Если $a \leqslant 0$, то $y_{\max} = 1 - a$; если $a > 0$, то $y_{\max} = 1 + a$. **5.88.** а) Если $b < -1$, то $y_{\min} = (b + 1)^2$; если $-1 \leqslant b \leqslant 1$, то $y_{\min} = 0$; если $b > 1$, то $y_{\min} = (b - 1)^2$; б) если $b \leqslant 0$, то $y_{\max} = (b - 1)^2$; если $b > 0$, то $y_{\max} = (b + 1)^2$. **5.89.** Если $0 < b < 0{,}5$, то $y_{\max} = \frac{b + 2}{\sqrt{5}}$; если $0{,}5 \leqslant b \leqslant 1$, то $y_{\max} = \sqrt{b^2 + 1}$; если $b > 1$, то $y_{\max} = \frac{b + 1}{\sqrt{2}}$. **5.90.** Если $b < -1$, то $y_{\min} = \frac{b - 1}{\sqrt{2}}$; если $-1 \leqslant b \leqslant -0{,}5$, то $y_{\min} = -\sqrt{b^2 + 1}$; если $-0{,}5 < b < 0$, то $y_{\min} = \frac{b - 2}{\sqrt{5}}$. **5.91.** 0,5 и 0,5. **5.92.** а) 24, 12, 18; б) 16, 16, 16. **5.93.** Это квадрат со стороной 2. **5.94.** а) $\frac{c^2}{4}$. **5.96.** $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{d\sqrt{6}}{3}$. **5.97.** Это куб с ребром 3. **5.98.** На расстоянии 12 км от пункта B. **5.99.** Ширина $\sqrt[3]{2V}$, высота $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$; а) 2 и 1; б) 4 и 2. **5.100.** Диаметр и высота цилиндра равны $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. **5.101.** $\sqrt{(a + b - c)(b - c)}$ м; а) 2 м; б) 4 м. **5.104.** а) $y = 2x$, в) $y = 2x - 1$; д) $y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$. **5.119.** 0 и $\frac{4}{3}$. **5.120.** а) $3^\pi > \pi^3$; б) $e^3 > 3^e$; в) $e^\pi > \pi^e$.

§ 6

6.7. а) $\frac{x^2}{2}-2$; б) $\frac{x^3}{3}-3$; в) $\frac{x^4}{4}-1$; г) $-\cos x+2$. **6.8.** а) $\frac{(5x-2)^{21}}{105}+C$; б) $\frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+C$; в) $\frac{2^x}{\ln 2}+C$; г) $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+C$; ж) $\frac{1}{4}\ln|4x-2|+C$; з) $-\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$. **6.10.** а) $\arcsin x+C$; б) $\operatorname{arctg} x+C$; в) $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$; г) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$; д) $\frac{1}{3}\arcsin 3x+C$; е) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x+C$. **6.12.** а) $\frac{x^2}{2}+C$; б) $\frac{x^3}{3}+C$; в) $\frac{x^4}{4}+C$; г) $-\cos x+C$; д) $\sin x+C$; е) $\operatorname{tg} x+C$; ж) $-\operatorname{ctg} x+C$; з) e^x+C; и) $\frac{8^x}{\ln 8}+C$; к) $\ln|x|+C$; л) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$; м) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$. **6.15.** а) $-\frac{5}{2}\cos 2x-6\sin\frac{x}{2}+C$; б) $5\ln|x+1|-\frac{1}{5}e^{5x-1}+C$; в) $-3\operatorname{ctg}(x+1)+7\operatorname{tg}(x-1)+C$; г) $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{5}(x-3)^{\frac{5}{3}}+C$. **6.16.** а) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$; б) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+C$; в) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$; г) $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; д) $-\frac{1}{9}\cos 9x+C$; е) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$. **6.17.** в) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x+C$; д) $\frac{1}{3}\arcsin(3x+1)+C$; е) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(4x-1)+C$; ж) $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+C$; з) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+C$. **6.19.** а) $\frac{1}{3}e^{3x}+C$; б) $\frac{9^{2x}}{2\ln 9}+C$. **6.20.** а) $-\sqrt{4-x^2}+C$. **6.21.** а) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$. **6.22.** а) $2\ln(1+x^2)+C$. **6.23.** а) $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$.

Указание. Сделайте замену $x=\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. **6.24.** а) $x\sin x+\cos x+C$; б) $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$; в) $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|+C$; г) $\frac{2}{3}x(x-7)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x-7)^{\frac{5}{2}}+C$. **6.25.** а) $(x^2-2x+2)e^x+C$; б) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; в) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **6.27.** а) $S_1=0$, $S_2=\frac{1}{4}$, $S_3=\frac{1}{3}$, $S_4=\frac{3}{8}$; б) $\frac{n-1}{2n}$; в) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **6.28.** а) Только знаком; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **6.29.** а) $S_1=1$, $S_2=\frac{5}{4}$, $S_3=\frac{4}{3}$, $S_4=\frac{11}{8}$; б) $\frac{3n-1}{2n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{2}$. **6.30.** а) $S_n=\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. **6.32.** а) 2; б) -2; в) -8; г) 8; д) -2; е) 4. **6.33.** а) -4; б) 12; в) 6,5. **6.34.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{9\pi}{4}$; г) -4π.

6.35. а) 0; б) 0. **6.36.** а) 4; б) 2,5; в) 2. **6.39.** а) 3; б) 10,5. **6.41.** а) $\approx 2{,}2$; б) $\approx -2{,}2$. **6.46.** а) $\frac{1}{2}$; б) 6; в) 20. **6.47.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 3. **6.48.** а) $\frac{1}{4}$; б) 0; в) 16,25. **6.49.** а) 2; б) 0; в) 0. **6.50.** а) 1; б) 0; в) 2. **6.51.** а) $\ln 2$; б) $\ln 1{,}5$; в) $\ln 3$. **6.54.** а) $10\frac{2}{3}$; б) $10\frac{2}{3}$; в) 4,5; г) 4,5. **6.58.** а) $\frac{1}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$. **6.59.** а) $F(x) = x^2 + 4x + 4$; $S = 2{,}25$. **6.62.** а) $S \approx 25$. **6.64.** а) 4,5; б) 0; в) 1; г) $e^3 - 1$; д) 2. **6.67.** а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **6.68.** а) 8; б) $21\frac{1}{3}$. **6.70.** а) $2 + \frac{\pi^3}{6}$; б) $2\sqrt{2}$. **6.72.** а) 1,5; б) 1,5. **6.73.** а) 0; б) 1,5; в) $\frac{\pi}{2}$; г) π; д) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$; е) $2\arcsin\frac{\pi}{6}$. **6.74.** а) 0; б) 7. **6.75.** а) 3π; б) 2π. **6.78.** $\frac{\pi^2}{2}$. **6.79.** $12{,}8\pi$. **6.86.** а) $y = x^4 + 1$; б) $y = -5\cos x + 5$; в) $y = 6\sin x + 5$; г) $y = -7\cos x - 8\sin x + 8$; д) $y = 11x^3 + 3x + 1$; е) $y = -6x^3 + 2x$. **6.93.** 36°. **6.94.** За 30 мин. **6.95.** 0,5 кг.

§ 7

7.4. а) πk, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; в) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **7.5.** а) 5; б) $-\frac{4}{3}$; в) 0; 2; г) -2; 0. **7.6.** а) -1; 0; 1; б) -1; 8; в) -10; -2; 6; г) -6; 3. **7.7.** а) 4; б) 4; в) -2; 0; г) $-\frac{1}{2}$; 0. **7.8.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; в) 2; г) 1. **7.10.** а) $-0{,}2$; б) $-2\frac{1}{11}$. **7.11.** а) $\frac{1}{1 - \log_2 3}$; б) $\frac{1}{\log_3 2 - 1}$. **7.12.** а) 2; б) 2; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; г) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; д) 1; е) 1. **7.13.** При $a = 4$. **7.19.** а) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; б) $(-\infty; -2) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. **7.20.** а) $\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; б) Нет решений. **7.21.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(1; +\infty)$. **7.23.** а) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$. **7.29.** а) $\left(\frac{1}{1 - \log_5 4}; +\infty\right)$; в) $(4 + \log_5 3; +\infty)$. **7.30.** а) $(-\infty; \log_5 2) \cup (2; +\infty)$. **7.31.** а) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 70)$; в) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; г) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **7.33.** $[-1; 0) \cup (0; 1]$.

§ 8

8.2. б) 0; в) -1; г) -4. **8.3.** а) 2; б) 1; в) -2; г) 0; д) -4; е) -4, $-2{,}5$. **8.4.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; е) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **8.8.** а) 0; 7; б) -4; 1; в) 5; г) нет корней. **8.9.** а) 2; б) 2; в) 2; г) $-0{,}25$; д) 0; 6;

е) 1. **8.10.** а) Нет корней; б) $\frac{1}{9}$; в) 1; г) -1; 0; д) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$, $k\in Z$. **8.11.** а) 2; 3; 4; б) 1; 2; 4; в) 10; г) 10; 1000; д) 1; 2; е) 1; 3. **8.12.** При $a\geqslant -4$. **8.14.** а) Нет корней; б) нет корней; в) 1; г) 2; 5. **8.15.** а) -1; 3; б) -4; 2; в) -2; $\frac{1}{2}$; г) -3; $\frac{1}{3}$. **8.16.** в) $\frac{1}{2}$. **8.17.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 2. **8.18.** а) 0; 1; б) 0; 1; в) 2; г) 1. **8.19.** а) $2\pi k$, $k\in Z$; б) $2\pi k$, $k\in Z$. **8.20.** При $a=2$. **8.22.** а) Нет корней; б) 1. **8.23.** а) Нет корней; б) 2; в) 1; г) 5. **8.24.** а) 6; б) -4; в) 6; г) 4. **8.25.** а) $-\frac{7}{3}$; б) 5; в) $\frac{1}{3}$; г) -2. **8.28.** а) 1; б) 3; в) -3; г) -3. **8.30.** а) $2\pi n$, $n\in Z$; б) πn, $n\in Z$; в) $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; $-\frac{7\pi}{12}+2\pi m$, $m\in Z$; г) $-\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$; $\frac{7\pi}{12}+2\pi m$, $m\in Z$. **8.31.** а) При $a\leqslant -\frac{1}{2}$; б) при $a\neq 0$, $a\neq 2$; в) при $a=1$, $a=-1$. **8.32.** а) 2; б) -1; 15; в) 2; 34; г) 2. **8.33.** а) 2; б) 3; в) 4; г) 1. **8.34.** а) 1; б) -5; в) 6; г) -2; 3. **8.35.** а) 1; б) 5; 6; в) 1; г) 3. **8.36.** а) 4; б) 3; в) 3; г) 4; д) 3; е) 4. **8.37.** а) 8; б) 9; в) 5; г) нет корней. **8.38.** в) 6; г) 4. **8.39.** а) 1; б) -2; в) 5; г) 5. **8.40.** а) 0; 3; б) 5. **8.41.** а) 8; б) 5; в) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $n\in Z$; г) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

§ 9

9.7. Да. **9.9.** а) 4; в) 13. **9.11.** а) 7. **9.12.** а) 27. **9.14.** а) 4; б) -5; в) 2; г) 4. **9.16.** а) -3; 2. **9.17.** а) -4; 3; 4; б) 1; -2. **9.18.** а) $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; в) $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$; πk, $k\in Z$, $k\neq 0$. **9.23.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, $k\neq 0$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **9.26.** а) $(3;+\infty)$; б) (3; 4). **9.27.** а) 3; б) 1,4. **9.28.** а) 2; 4; б) 1; 3; в) 3; г) 2. **9.29.** а) 2; б) 2; в) 3; г) 3. **9.30.** а) 3; б) 2; в) 5; г) 6. **9.31.** а) -2; б) -5. **9.32.** а) 8. **9.33.** а) 137. **9.34.** При $a=1$, $a=-3$. **9.38.** а) 9; б) -3; в) 1; 4; г) 1; 5. **9.39.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **9.40.** а) 3; б) 4; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **9.42.** а) Нет корней; б) 1; 2001; в) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; г) πk, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **9.44.** а) $(5;+\infty)$; б) $(4;+\infty)$. **9.45.** а) $[0{,}5;5)$; б) $[-0{,}5;4)$. **9.46.** а) $[4;5)\cup(7;+\infty)$. **9.47.** а) $\left[\frac{16}{25};1\right]\cup[4;+\infty)$; б) $\left[\frac{4}{9};1\right]\cup[2;+\infty)$; в) $\{1\}\cup$ $\cup[4;+\infty)$; г) $\{1\}\cup[2;+\infty)$. **9.48.** а) $(-6;-4)\cup(10;+\infty)$; б) $(-6;-4)\cup(4;9)$. **9.49.** а) (2; 3]; б) (2; 3]. **9.50.** а) $(-1;0)\cup(0;1)$; б) $(-1;1)\cup(1;2)$. **9.53.** а) $(-2;-1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$; б) $(-3;-2)\cup(2;+\infty)$; в) $(-\infty;3)\cup(4;5)$; г) $(-\infty;-4)\cup(2;3)$. **9.54.** в) $(0;1)\cup(2;3]$; г) $[0;1)\cup(2;3)$. **9.55.** а) $[0;1)\cup(4;+\infty)$; б) $[0;2)\cup$ $\cup(9;+\infty)$; в) $(-\infty;-4)\cup(-2;0]$; г) $(-\infty;-9)\cup(-2;0]$. **9.56.** а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$; в) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup(2;3)$. **9.59.** а) (4; 4096).

9.60. а) $\left[-3; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 3\right]$. **9.61.** а) $[-3; 2) \cup (2; 3]$. **9.62.** а) $(0; 0{,}1) \cup (0{,}1; 1) \cup (2; +\infty)$. **9.63.** а) $(-0{,}5; 0) \cup (0; 0{,}5) \cup [2; 3) \cup (7; 8]$; в) $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. **9.64.** а) $\left(\frac{7}{8}; 1\right)$. **9.65.** а) При $a \in [-2; 2)$. **9.70.** а) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $(1; 3]$. **9.71.** а) $[4; +\infty)$. **9.72.** а) Нет решений; б) $\left(1; \frac{5}{3}\right]$; в) $(1; 1{,}5]$. **9.73.** а) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$.

§ 10

10.5. а) 6; б) нет корней; в) 5; г) нет корней. **10.6.** а) 7; б) 1; в) 3; г) -2; 5,25. **10.7.** а) $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$; б) $\frac{9+\sqrt{13}}{2}$; в) $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **10.8.** а) $-2+\sqrt{3}$; б) $4-2\sqrt{3}$; $4+2\sqrt{3}$; в) нет корней; г) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **10.9.** а) $\frac{\pi}{3}+4\pi k$; $\frac{5\pi}{3}+4\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **10.11.** а) $\sqrt{22}$; б) $\sqrt{14}$. **10.12.** а) 8; б) 1; в) 5; г) -1. **10.13.** а) 1; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; б) 2; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; в) 7; г) -1; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **10.14.** а) $-2{,}5$; б) $-\frac{7}{3}$. **10.15.** а) -4; 0,5; б) 10; 12. **10.16.** а) 4. **10.17.** а) Нет корней. **10.18.** а) -1; 1; в) 4. **10.19.** а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **10.20.** а) 3; б) 2; в) 2; г) 1; д) 1; е) 2. **10.21.** а) $-\operatorname{arctg} 0{,}75+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **10.22.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{5}+2\pi k$, $\pm\frac{3\pi}{5}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{5}+2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{5}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **10.24.** а) $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; б) $-1-\sqrt{14}$. **10.25.** д) 1; е) 1. **10.26.** а) 3; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \geqslant 0$. **10.27.** а) 3; б) -1. **10.28.** а) 2; б) 4; в) -7; г) -3. **10.29.** а) 3; 27; б) $\frac{1}{64}$; 4; в) $\frac{1}{3}$; 27; г) 4; 8. **10.30.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m$; πm, $m \in \boldsymbol{Z}$. **10.31.** а) 3. **10.32.** а) $4-2\sqrt{2}$; в) $4+2\sqrt{3}$. **10.33.** а) -3; 4. **10.35.** а) $\frac{11-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{11+\sqrt{21}}{2}$; б) $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$. **10.36.** а) 9; б) -2. **10.37.** а) $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$; б) $\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$. **10.38.** а) 4; б) 5; в) 29; $2\frac{1}{9}$. **10.39.** а) 9. **10.43.** а) 3; 4; 5; б) 3; 3,5. **10.44.** а) 2; 3;

б) 1; $\frac{7+\sqrt{41}}{4}$. **10.45.** а) 0; $-\frac{\pi}{6}$; б) $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; в) -1; $-\frac{\pi}{6}$; 1; г) -1; 0; 1. **10.46.** а) 3; б) 2. **10.47.** При $a=0$, $a=-4$, $a=4$. **10.48.** а) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; 0; $\frac{4\pi}{3}$. **10.51.** а) 0; б) нет корней. **10.52.** а) $\log_3 75$.

§ 11

11.6. а) $\left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty)$; б) $\left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup (3; +\infty)$. **11.7.** а) $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; б) $[1; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$; в) $\left[\frac{3}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. **11.8.** а) $(3; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$. **11.9.** а) $[-1; 3)$; б) $[-4; 5)$. **11.10.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 2)$. **11.12.** а) $(-2-\sqrt{7}; -3]$; б) $(-\infty; -1]$. **11.13.** а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $(0; 2)$. **11.14.** а) $[0{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-1{,}25; 1)$. **11.15.** а) $\left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$; в) $[-1; 0) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. **11.18.** а) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $\left(0; \frac{7-\sqrt{37}}{2}\right)$. **11.19.** а) $(-1; 1)$; б) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. **11.20.** а) $(-1; 0) \cup (0; 2)$. **11.21.** а) $(1-\sqrt{8}; 3) \cup (3; 1+\sqrt{8})$; б) $(-1; 3)$; в) $(-1-\sqrt{2}; -2) \cup (-2; -1+\sqrt{2})$; г) $(-9; -5)$. **11.22.** а) $(0; 2)$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **11.24.** а) $(3; +\infty)$; в) $(3; 4)$. **11.26.** а) $\left(1\frac{2}{3}; 2\right)$; б) $\left(1\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$. **11.27.** а) $\left(\frac{20}{17}; \frac{11}{9}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{11}{9}; 2\right)$; б) $\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{5}\right) \cup \left(\frac{7}{5}; 2\right)$. **11.28.** а) $(-2; 5)$; б) $(-3; 4)$. **11.29.** а) $\left(-1; \frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$; в) $(-2; 0) \cup (0; 3)$. **11.30.** а) $[0; 4)$. **11.31.** а) $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **11.32.** а) $(-0{,}5; 1{,}5)$. **11.33.** а) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; 81)$; б) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (1; 25)$. **11.34.** а) $[0; 1)$; б) $[0; 4)$. **11.35.** а) $(-3; 1)$; б) $(-\infty; -4) \cup$ $\cup (-0{,}4; +\infty)$. **11.38.** а) $(0; 1{,}6) \cup (2{,}5; +\infty)$. **11.39.** а) $[-3; 1)$. **11.40.** а) $(9; +\infty)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$; г) $(2; +\infty)$. **11.42.** а) $(1; 3)$; б) $(-3; -1)$. **11.44.** а) $(0{,}5; 1) \cup$ $\cup (2; +\infty)$. **11.45.** а) $(3; 1+\sqrt{5}) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$. **11.47.** При $a \in (0; 1)$. **11.48.** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$. **11.49.** а) $[3; \log_3 0{,}75)$. **11.50.** а) $[-2; 0) \cup (1; 2]$. **11.51.** а) $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$; б) $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right]$. **11.52.** а) $\left[-1; 2\frac{2}{3}\right)$. **11.53.** а) $\left(\frac{\pi}{4}; \pi - \operatorname{arctg} 3\right]$. **11.54.** а) $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{5\pi}{4}; -\pi\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. **11.55.** а) $\{2\} \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup \{3\}$;

в) $\{-4\} \cup [-3; 5]$; г) $\{-5\} \cup [-3; 2]$. **11.56.** а) $[-8; -3] \cup [3; +\infty)$; б) $\{-2\} \cup [2; 4]$; в) $\{-4; 4\} \cup [5; +\infty)$; г) $(-\infty; -7] \cup \{-5; 5\}$. **11.57.** а) $[-4; -3{,}5) \cup \{3\}$; в) $[-4; 2]$. **11.58.** а) $[2; 5) \cup (6{,}6; +\infty)$; б) $\left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \{0\}$. **11.61.** а) $(0; 2]$; б) $(0; 1]$; в) $(2; 4]$; г) $(0; 3]$. **11.63.** а) $[10^7; +\infty)$. **11.64.** а) $\left(0; \frac{1}{6}\right) \cup [3; 5) \cup (12; 20]$.

§ 12

12.1. а) -1; в) -2; 2; д) 2. **12.2.** а) 1; 5; б) -1; 5; в) 0; 6; г) -2; 3. **12.3.** а) -1; 0; б) -5; -4. **12.4.** а) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 0; в) 0; 3. **12.5.** а) 3; 7; б) -2; в) 5; г) 2; д) 3; $\frac{7}{5}$; е) $-\frac{3}{2}$; -2. **12.6.** а) $(-3; -1)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $2{,}5$. **12.7.** а) 1; 12; б) 2; 23. **12.9.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) $[2; 4]$; г) 9. **12.10.** а) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$; б) $(0; 6)$; в) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; г) $(2; 6)$. **12.11.** а) $\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$; б) $(-0{,}5; 4{,}5)$. **12.12.** а) $(-6; 2)$; б) $(-6; 0)$; в) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; -8{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$. **12.13.** а) $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$; б) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$; в) $\{-2\} \cup [1; 3]$; г) $\{-1\} \cup [0; 2]$. **12.14.** а) $(1; 2) \cup (2; +\infty)$; б) $(6; +\infty)$; в) $(2; 4]$; г) $[5; 8)$. **12.15.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $(1; 3)$; в) $\{0\} \cup [2; 3]$; г) $\{1\} \cup [2; 3]$. **12.16.** а) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$. **12.18.** а) $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$; б) $(-1; 3)$; в) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; г) $(-5; -1)$. **12.19.** а) $(0; 2) \cup (3; 10)$; б) $(3; 4) \cup (4; 5)$; в) $(1; 4) \cup (4; 5)$; г) $(0; 3) \cup (3; 4)$; д) $(-2; -1) \cup (0; 0{,}5)$; е) $(0; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2)$. **12.20.** а) $\{-3\} \cup [0; 3]$; б) $[-5; -2] \cup [2; 6]$; в) $(-\infty; -3] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup (-2; 2\} \cup [4; +\infty)$. **12.22.** а) $(-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$. **12.23.** б) $(-11; -4] \cup [4; 6)$.

§ 13

13.1. а) 7; б) 6; в) -3; 3; г) -2; 2. **13.2.** а) 4; б) -1; в) 2; г) 2. **13.3.** а) -1; б) нет решений; в) -1; 5; г) -2. **13.4.** а) 9; б) 4; в) нет решений; г) -2. **13.5.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 4$. **13.6.** а) 6; б) 5; в) 4; г) 3. **13.7.** а) 0; б) 1. **13.8.** а) 7; б) 5. **13.9.** а) -1; б) -2. **13.10.** а) 3; б) 4. **13.11.** а) 5; б) 4. **13.13.** а) 0; б) 2; в) 5; г) 6. **13.14.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 2π; в) нет решений; г) нет решений. **13.15.** а) 2; б) 3. **13.16.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **13.17.** а) 0; б) 3. **13.18.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) -2; г) 3. **13.20.** а) 3; б) 0. **13.21.** а) 0; б) 0; в) 1; г) -1. **13.22.** а) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) 4; $\frac{1}{4}$; г) 10; $0{,}1$. **13.23.** а) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **13.24.** а) -1; 0; б) 1. **13.25.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$,

$k \in Z$. **13.26.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{4}$. **13.27.** а) 1; б) 3; в) 2; г) 1. **13.28.** а) 3; б) 3. **13.29.** а) 2; б) 3. **13.30.** а) 1; б) 2. **13.31.** а) 1; б) 0,6; в) 0. **13.32.** а) $(0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$. **13.33.** а) $(1; +\infty)$; б) $(2; +\infty)$. **13.34.** а) 4; б) 2. **13.35.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **13.36.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **13.37.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **13.38.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

§ 14

14.2. а) Нет; б) да. **14.3.** а) (1; 1); б) (1; 5); (5; 1). **14.6.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **14.7.** а) (1,4; 0,6); б) $\left(\frac{5}{11}; \frac{4}{11}\right)$; в) (3; –1); г) $\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in Z$; $\left(\frac{11\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in Z$. **14.8.** а) $(\pi k, 6)$, $k \in Z$; б) (3; 3); в) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$; г) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$, $n \in Z$; д) $\left(\pm\arccos\frac{\pi}{4} + \pi k; 2\right)$, $k \in Z$. **14.9.** а) (3; –2); б) (1; –6); в) (2; –3); г) (–5; 1). **14.10.** а) (1; 2); б) (2; 1); в) $(\log_2 12; 48)$. **14.11.** а) (4; 4,5); б) нет решений. **14.12.** а) (0; 3); б) (1; 1). **14.13.** а) (1; 3); (3; 1); б) (3; 2); (–2; –3). **14.14.** а) $(1 - \sqrt{2}; -1)$; $(1 + \sqrt{2}; -1)$; б) (0; 1); (–2; 1); (–5; 4); (3; 4). **14.15.** а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$; $(2; t)$, $t \in R$, б) $\left(\frac{12}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; (2; –1). **14.16.** а) $\left(\frac{3\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k; -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; в) $\left(\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{6} - \pi k\right)$, $k \in Z$. **14.17.** $(\log_{4,5} 2; \log_{4,5} 4)$. **14.20.** а) (3; –1); б) (2; 1); в) (–1; 5); г) (7; –2). **14.21.** а) (3; 2); б) (5; 3); в) (4; 1); г) нет решений. **14.22.** а) (1; 2); б) (2; 2); в) (1; 1); г) (–1; 1). **14.23.** а) (3; 1); (–3; –1); б) (1; 1); (–1; –1); (–2; –1); в) (1; 5); (–1; 4); г) (1; 1); (–1; –1). **14.24.** а) (2; 1); б) $(\sqrt{3}; \sqrt{3} - 1)$; в) (2; 0,5); г) $(0; \sqrt{6})$; $(-2; 2)$. **14.25.** а) (8; 4); б) (4; 8). **14.26.** а) (14; 5,5); б) (3,5; –2). **14.27.** а) (3; 0); (–5; 0); б) (0,5; 5,5); (1,5; 5,5). **14.28.** а) (–2; –5); (5; 2); б) (5; 2); (–5; 2); в) $(4; \sqrt{3})$; $(4; -\sqrt{3})$; (3; 2); (3; –2); г) (2; 3); (3; 2). **14.29.** а) (1; 2); б) (5; –2). **14.30.** а) (1; 1); (2,5; –2); б) (3; 2); (2; 3). **14.31.** а) (17; 7); б) (17; 6). **14.32.** а) (2; 0); б) (1; 0); в) (1,5; 2). **14.33.** а) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \sqrt{2}\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\sqrt{3}; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$,

$k \in \boldsymbol{Z}$. **14.34.** а) (3; 1); $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{9}\right)$; б) $\left(2-2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(2+2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$. **14.35.** а) (41; 40); б) (12; 4); (34; –30); $(103-19\sqrt{17}; -77+25\sqrt{17})$. **14.36.** а) (1; 4); (4; 1); б) (1; 8); (8; 1). **14.37.** (650; –646); (26; 10). **14.38.** а) (0; 1); б) (0; 1). **14.39.** а) (2; 2; 2); б) (–4; 2; 0); (–2; 1; 2). **14.40.** а) (3; 4); (4; 3); (–3; –4); (–4; –3). **14.41.** а) (4; 2); $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **14.42.** а) (–2; 1); б) (–0,4; 0,4); в) (–2,5; –0,5). **14.43.** (16; 4). **14.44.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}+\pi l; \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $l \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; б) (10; 1; 0). **14.45.** а) $\left(1; 1+\frac{\pi}{2}+\pi m; 1\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

§ 15

15.1. а) $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = 2$; $x = a + 2$ при $a \neq 2$. **15.2.** а) Нет решений при $a = 2$; $x = a - 1$ при $a \neq 2$. **15.3.** а) Нет решений при $a = 0$, $a = 0{,}5$; $x = \frac{1-a}{a}$ при $a \neq 0$, $a \neq 0{,}5$. **15.4.** а) $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = 0$; нет решений при $a = -10$; $x = 0{,}5$ при $a \neq 0$, $a \neq -10$. **15.5.** а) $x = -1$ при $a < 1$ или $a > 1$; $x \in (-\infty; -1]$ при $a = 1$; $x = -1$, $x = \frac{a+3}{1-a}$ при $-1 < a < 1$; $x \in [-1; 1]$ при $a = -1$. **15.6.** а) Нет решений при $a = 0$, $a = 5$; $x = \frac{a-6}{4a}$ при $a \neq 0$, $a \neq 5$. **15.7.** а) Нет решений при $7 < a < 11$; $x = -2$ при $a = 7$; $x = -4$ при $a = 11$; $x = -\frac{17}{6}$ при $a = \frac{17}{6}$; $x = \frac{-a-3 \pm \sqrt{a^2-18a+77}}{2}$ при $a < \frac{17}{6}$, $\frac{17}{6} < a < 7$, $a > 11$. **15.8.** а) $x \in [3; +\infty)$ при $a = -9$; нет решений при $a \neq -9$; б) $x \in [-1; +\infty)$ при $a = 1$; нет решений при $a \neq 1$. **15.9.** а) Единственный корень при $a < 0$ и $a > 4$; два корня при $a = 0$, $a = 4$; три корня при $0 < a < 4$. **15.10.** а) Нет решений при $a = 1$; $x > a + 1$ при $a > 1$; $x < a + 1$ при $a < 1$. **15.11.** а) $x \in \boldsymbol{R}$ при $a \leqslant 0$; $\frac{-2}{\sqrt{a}} < x < \frac{2}{\sqrt{a}}$ при $a > 0$; б) $x \in \boldsymbol{R}$ при $a \geqslant 0$; $\frac{-2}{\sqrt{-a}} < x < \frac{2}{\sqrt{-a}}$ при $a < 0$; в) $x \geqslant 0$ при $a = 0$; $x \leqslant 0$, $x \geqslant \frac{1}{a}$ при $a > 0$; $\frac{1}{a} \leqslant x \leqslant 0$ при $a < 0$. **15.12.** а) Нет решений при $a = 0$; $x < 0$, $x > 1$ при $a > 0$; $0 < x < 1$ при $a < 0$. **15.13.** а) $x > 0$ при $a = 0$; $0 < x < \frac{1}{a}$ при $a > 0$; $x < \frac{1}{a}$ при $a < 0$; в) $x \geqslant 0$ при $a = 0$; $x \leqslant -\frac{1}{a}$, $x \geqslant 0$ при $a > 0$; $0 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{a}$ при $a < 0$. **15.14.** а) $x \in \boldsymbol{R}$ при $|a| \leqslant 4$; $x \leqslant \frac{-a-\sqrt{a^2-16}}{2}$, $x \geqslant \frac{-a+\sqrt{a^2-16}}{2}$ при $|a| > 4$. **15.15.** а) $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = 1$; $x \leqslant -a$, $x \geqslant -1$ при $a > 1$; $x \leqslant -1$, $x \geqslant -a$

при $a < 1$. **15.16.** а) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ при $a = 1$; $x > a$, $x < 1$ при $a > 1$; $x < a$, $x > 1$ при $a < 1$. **15.17.** а) $-1 < x < 1$ и $x > 1$ при $a = \pm 1$; $-a < x < 1$ и $x > a$ при $a > 1$; $-a < x < a$ и $x > 1$ при $0 < a < 1$; $a < x < -a$ и $x > 1$ при $a < 0$; $x > 1$ при $a = 0$. **15.18.** а) $x \geqslant a$ и $x = 1$ при $a > 1$; $x = 1$ при $a < 1$; $x \geqslant 1$ при $a = 1$. **15.19.** а) $x \geqslant a$ при $a > 1$; $x > 1$ при $a \leqslant 1$. **15.20.** а) Нет решений при $a > 3$; $x = 3$ при $a = 3$; $\frac{a+3}{2} \leqslant x \leqslant 3$ при $a < 3$. **15.21.** а) Нет решений при $a \geqslant 13$; $\frac{a+13}{2} \leqslant x < 13$ при $a < 13$. **15.22.** а) Нет решений при $a \leqslant 0$ или $a = 1$; $7{,}5 \leqslant x < 13$ при $a > 1$; $2 < x \leqslant 7{,}5$ при $0 < a < 1$. **15.23.** а) Нет решений при $a \leqslant 0$ или $a = 1$; $2 \leqslant x < 3$ при $a > 1$; $1 < x \leqslant 2$ при $0 < a < 1$. **15.24.** а) Нет решений при $a = 1$; $x = \frac{a^2 - 2a - 1}{a - 1}$, $y = \frac{a+1}{a-1}$ при $a \neq 1$. **15.25.** а) $x = 1 - t$, $y = t$, где $t \in \boldsymbol{R}$ при $a = 1$; $x = 1$, $y = a + 1$ при $a \neq 1$. **15.26.** а) Нет решений при $a < \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}; \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}\right)$ при $a > \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ при $a = \frac{1}{2}$. **15.29.** а) $(\pi + 4\pi n; 2\pi k)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ при $a = -1$, $a = 3$; нет решений при $a \neq -1$, $a \neq 3$. **15.30.** а) При $a \in (-7; -3) \cup \left(-3; -\frac{5}{3}\right)$. **15.31.** а) $x = \frac{a-2}{a+1}$ — единственное решение при $-1 < a \leqslant 1$. **15.32.** а) Нет решений при $0{,}5 < a \leqslant 1$; единственное решение при $a \leqslant -1$, $a = 0{,}5$, $a > 1$; два решения при $-1 < a < 0{,}5$. **15.33.** а) $a \in (0{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\}$. **15.35.** а) При $a < 1$, $a = 1{,}25$; б) при $a = 2{,}75$, $a > 3$. **15.36.** а) $0 < a \leqslant 0{,}75$, $a = 1$; б) $0{,}8 < a < 1$, $a > 1$. **15.37.** а) $b < -4$; б) $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right) \cup \left(-\frac{5}{7}; 0\right) \cup \left[\frac{8}{7}; +\infty\right)$. **15.38.** а) $a \geqslant 3$. **15.39.** а) $a = -1$; б) $1 < a < 2$. **15.40.** а) $a \in (-2; 2]$; б) $a \in \left(-\frac{11}{7}; 3\right]$.

§ 16

16.15. а) $4 + 7i$; б) $7 + 4i$; в) $-4 - 3i$. **16.16.** а) $2 - 3i$, б) $-1 - 26i$; в) $-6 + 5i$. **16.17.** а) $-7 + 17i$; б) $17 + 11i$; в) $-1 + 21i$. **16.18.** а) $0{,}5 - 0{,}5i$; б) $-\frac{153}{241} - \frac{89}{241}i$; в) $-\frac{9}{17} - \frac{19}{17}i$. **16.19.** а) $21 + 20i$; б) $5 - 12i$; в) $15 + 8i$; ж) $-2 + 2i$; з) $-11 + 2i$; и) $2 + 11i$. **16.20.** а) 16; б) $-24i$; д) 36; е) $4i$. **16.21.** а) $x^2 + 1$; б) $x^2 + y^2$; д) $-25x^2 + 16y^2 + 40xy^2i$. **16.22.** в) $(4x + yi)(4x - yi)$. **16.24.** а) $-12 - 5i$; б) $\frac{12}{169} - \frac{5}{169}i$. **16.26.** а) 1; б) -3; 3. **16.28.** а) -4; б) -9; 9. **16.29.** а) $x = 3$, $y = 9$; $x = -3$, $y = -9$; б) $x = 97{,}5$, $y = -7{,}5$; $x = 13$, $y = 1$. **16.30.** а) $1 + 4i$; б) $-3 - 2i$. **16.44.** а) (2; 0); б) (−2; 0); в) (0; 1); г) (0; −1); д) (2; 1). **16.45.** а) 1; б) i; в) -1; г) $-i$. **16.51.** а) $z = -2 - 5i$; (−2; −5); б) $z = -1 + 2i$; (−1; 2).

§ 17

17.3. а) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; б) $3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; $\frac{5\pi}{4}$; в) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; г) $z=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **17.4.** а) $\cos 0+i\sin 0$; 0; б) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; π; в) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; г) $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. **17.6.** а) $5(\cos(\arccos 0{,}6)+$ $+i\sin(\arccos 0{,}6))$, $\arg z=\arccos 0{,}6$; д) $\sqrt{5}\left(\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+i\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **17.7.** а) 1; б) -6. **17.13.** а) -1; б) $4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$. **17.18.** а) 128; б) $-128\sqrt{3}$. **17.20.** а) $8\sqrt{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$; б) 4; $\frac{2\pi}{3}$. **17.23.** а) $-1+\sqrt{3}i$; б) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **17.24.** а) 1; -1; б) $-i$; i. **17.25.** а) 1; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1; $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

§ 18

18.2. а) $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$; б) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **18.4.** а) 1; 2; б) -1; 2; в) 1; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **18.5.** а) $5e^{i\arcsin(-0{,}6)}$; б) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. **18.6.** а) $3e^{i\alpha}$; б) $4e^{i(\pi+\alpha)}$. **18.7.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $1+\sqrt{3}i$. **18.9.** а) -2; б) $12e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Задания для повторения

1. а) 144; б) 0,0115; в) 211; г) 395. **2.** 679. **3.** а) 180; б) 1,8; в) 1. **6.** 858. **8.** 1; 16. **9.** а) 1; б) 1. **12.** а) 1; б) -1; в) $\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{15}$. **13.** $\sqrt{2}$. **14.** а) 0; б) 25. **15.** а) 1; б) 12. **16.** а) Второе число больше; б) первое число больше. **21.** 5. **22.** а) 1; б) 1; в) 0,5; г) 2; д) 0. **23.** $4\frac{1}{3}$. **25.** б) -1. **26.** а) $\frac{4}{a-4}$; б) -2. **27.** $0{,}5a^2$ при $x>-a^4$, $x\neq 0$, $a\neq 0$. **28.** а) 6; б) 4,5; в) 15; г) -2. **29.** а) 1,8; б) 0,6; в) -6. **30.** а) 27 и -27; б) 16 и -16. **32.** а) -6; -5; -4; б) 3. **33.** а) $-5\sqrt[4]{\frac{7}{202}}$; б) $-3\sqrt[4]{\frac{51}{196}}$. **34.** а) 1; 2; б) 1; $\frac{1}{3}$. **35.** а) $a_1=3$, $d=6$; б) $\frac{1}{9}(\underbrace{777\ldots7}_{n}0-7n)$. **36.** а) $2^{2000}\cdot 3^{1999000}$; б) $3^{2000}\cdot 4^{1999000}$. **48.** а) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. **49.** а) $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **50.** а) $(-3;1]$. **51.** а) $[4;10]$. **52.** а) $(-\infty;-\sqrt{3})\cup[-1;1]\cup[\sqrt{3};+\infty)\cup\{1{,}5\}$. **53.** а) $(2{,}5;3)\cup(3;+\infty)$; в) $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0]\cup[3{,}5;+\infty)$. **55.** а) $(-3;-2)\cup$ $\cup(2;-1]\cup[2;3)$. **56.** а) $(2;3)$. **57.** а) 2. **58.** а) 3997; б) 3998. **60.** а) $1+8n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $7+8m$, $m\in\boldsymbol{Z}$. **61.** а) 4 004 001; б) 4 008 004. **62.** 3. **63.** 1,5. **64.** а) -2; -1. **65.** а) -127; -101. **67.** При $k=0$, $k=n(n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 1$, $n\neq 0$. **68.** а) На-

пример, $x^2 - 8x + 13 = 0$. **69.** а) 5,2; б) –0,5; в) 1. **71.** а) 4; б) 2; в) 8; г) 5. **72.** а) 26; б) 27; в) 32; г) 29. **73.** –4; 9. **74.** а) –3; $\frac{3}{7}$; б) 3; $8 \pm 2\sqrt{15}$. **75.** а) $-\frac{7}{3}$; б) $-\frac{13}{12}$; в) $-\frac{9}{4}$; г) $-\frac{11}{8}$. **76.** а) 0,2; 0,8; б) $-\frac{8}{3}$; $-\frac{4}{3}$. **77.** а) 8; б) 12; в) 9; г) 7. **78.** а) 1; б) 5; в) 3; г) 2; д) 5; е) 6; ж) 2; з) –2,5; 2; и) $\sqrt[3]{9}$; к) $\sqrt[3]{36}$. **79.** а) $\frac{15 + \sqrt{129}}{8}$; б) $\frac{19 + \sqrt{137}}{8}$. **80.** а) 1; б) 2. **81.** а) 12; б) 8. **82.** а) Нет корней; б) –3; 2; в) –1; 0; г) 4; 548. **83.** а) 7; б) 9. **84.** а) $\frac{13 - \sqrt{21}}{2}$; б) $\frac{9 - \sqrt{21}}{2}$. **85.** а) $2 + \sqrt{3}$; б) $2 + \sqrt{2}$. **86.** а) 3; б) 2. **87.** а) 5; б) –2; в) нет корней. **88.** а) 27; 99; 342; б) –600; –100; 156. **89.** а) –3; –1; 5; б) –3; –2; 3. **90.** а) 3; б) 2. **91.** а) –1; б) $\frac{6 \pm 5\sqrt{3}}{2}$; в) 2. **92.** а) –4; б) 1; 2; в) –3; г) –10; д) –18; е) –1; ж) 0,4; з) 1. **93.** а) $-\frac{18}{13}$; б) $-\frac{76}{17}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) $-\frac{1}{2}$; е) 2; ж) $\sqrt{10}$; з) 9. **94.** а) 2; б) 2; в) 0. **95.** а) –1; б) 2. **96.** а) 0,75; 3,25; б) –2; 4; в) $1 \pm \sqrt{10}$; г) $\frac{1 \pm \sqrt{23}}{2}$. **97.** а) $3 + \sqrt{2}$; б) –2; в) $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{3}$. **99.** а) $\log_3 2$; $\log_2 9$; б) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$; $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^{-0,5}$. **98.** а) 100; б) 1000. **100.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{2}$. **101.** а) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **102.** а) 0; $\pm\pi$; $\pm \frac{3\pi}{4}$; $\pm \frac{5\pi}{4}$; б) $\pm \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. **103.** а) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **104.** а) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **105.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; в) $\pm \operatorname{arctg} \sqrt{15} + \pi n$, $n \in Z$. **106.** а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. **108.** а) $\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **110.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **111.** $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $-\frac{7\pi}{4} + \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$. **112.** $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. **113.** $\frac{3\pi}{2}$; 2π, $2\pi - \arccos \frac{2}{5}$. **114.** πk, $k \in Z$. **115.** $\pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **116.** $\pm \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **117.** $2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi l$, $l \in Z$; $2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$. **118.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **121.** а) 1; б) –1. **123.** 0; $\frac{15}{4}$; 4. **124.** –1; 3. **125.** 0; $\pm\sqrt{2}$. **126.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$,

$n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $2\pi k$, $k \in Z$. **128.** $\pm\frac{15\pi}{34} + 3\pi n$, $n \in Z$. **129.** $\pm\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}+1} + 2\pi n$, $n \in Z$. **131.** а) $(-1)^k \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\arccos\frac{2\sqrt{6}}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$. **132.** а) $-\frac{7\pi}{4}$; -6; -5; б) -4; $\frac{5\pi}{4}$; -3. **133.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; πn, $n \in Z$. **136.** а) 1; б) -1. **138.** а) 4; б) 2002; в) 2; г) 1; д) 2; е) 4; 5. **139.** ± 1. **144.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **145.** а) Нет корней; б) нет корней. **146.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. **148.** а) -9; -8; -6; -5; б) 4; 5; 7; 8. **149.** $(2n-1)^2$, $n \in N$. **150.** -4. **151.** $3 \pm \sqrt{5}$. **152.** $\frac{1 \pm \sqrt{1+5\pi n}}{5}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **153.** $\frac{\sqrt{356}-12}{6}$; $\frac{\sqrt{164}-12}{6}$. **154.** 7. **155.** 1,5. **156.** 0. **157.** 3. **159.** а) 3; б) 2,5; в) 1; г) 0. **163.** $(-4; -3) \cup (-2; -1) \cup (-0{,}5; 3)$. **166.** а) $(-8; -2) \cup (0; 2)$; б) $(-\infty; -4) \cup (0; 4) \cup (6; +\infty)$; в) $(-3; -1) \cup (0; 3)$; г) $(-\infty; -5) \cup (0; 5) \cup (9; +\infty)$. **168.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 3]$; б) $(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $(-3; 0) \cup (0; 4]$; г) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup [5; +\infty)$. **169.** а) $(-\infty; -9) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{3}; -1\right] \cup (1; +\infty)$. **170.** а) $\left[\frac{11}{12}; 1\right)$; б) $\left[\frac{9}{11}; 1\right)$. **171.** а) $(-\infty; -3] \cup [3; 5)$; б) $(-2; 0] \cup [6; +\infty)$; в) $\left(0; \frac{4}{3}\right]$; г) $(0; 1{,}6]$. **173.** а) $\left(\frac{4}{7}; \frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$; б) $\left(\frac{2}{5}; \frac{17+\sqrt{73}}{18}\right)$. **174.** а) Нет решений; б) $[-2; -1] \cup \{1\}$. **175.** $(-\infty; 2] \cup [6{,}5; +\infty)$. **177.** а) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$. **178.** а) $(0{,}58; 0{,}6)$; б) $(0{,}44; 0{,}5)$. **183.** $(-\infty; 0)$. **184.** $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$. **186.** $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$. **187.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **189.** а) $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{65}}{16}; \frac{\pi}{3}\right)$. **190.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **191.** а) $\left[\frac{1-\sqrt{41}}{2}; -2\right) \cup (-2; -1] \cup [2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{-3+\sqrt{73}}{4}\right]$. **192.** а) $(-\infty; -4) \cup \{0; 2\} \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup \{0; 1\} \cup (3; +\infty)$. **193.** $[0; 3{,}75] \cup [4; +\infty)$. **194.** б) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$. **195.** а) $\left(-\frac{23}{7}; 1\right)$. **196.** б) $(-6; -3) \cup (3; +\infty)$. **197.** а) $\{1\} \cup [2; 3]$; б) $\{-11\} \cup [-3; -2]$; в) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty) \cup \{0\}$; г) $(-\infty; -7] \cup [8; +\infty) \cup \{0\}$. **198.** $[0; +\infty)$. **199.** а) $(-1; 2)$. **201.** а) $(-1; 4)$; б) $(1; 2] \cup (7; 8)$. **203.** а) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; 2\sqrt{3})$; б) $\{-12\} \cup (7; +\infty)$. **204.** а) $[2; 3] \cup [6; 9)$; б) $(0; 3) \cup$

$\cup [6; 7)$; в) $[4; 7]$; г) $(-3; 1) \cup [5; 6)$. **205.** а) $[-5; -3] \cup (-1; 1]$. **207.** а) $(2 - \log_2^2 3; 2]$; б) $(3 - \log_3^2 2; 3]$. **210.** а) $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 0\right]$. **211.** а) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; 2]$; б) $\left(-1; -\frac{4}{5}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{4}{5}; 0\right) \cup (0; 1]$. **212.** а) $(1; +\infty)$; б) $(\log_2 49; \log_2 7)$. **213.** $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (3; 3^{\sqrt{13}})$. **214.** а) $-6 < x < 4$, $x \neq -1$, $x \neq 3$, $x \neq -1 \pm 2\sqrt{6}$; б) $(-\infty; \log_{7-\sqrt{22}} 2] \cup$ $\cup [\log_{7+\sqrt{22}} 12; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup [0; \log_{15} 16 - 1)$. **215.** $[2; +\infty)$. **216.** $\left[\frac{1}{8}; 1\right) \cup$ $\cup (1; 16] \cup (64; +\infty)$. **217.** а) $(3; 4]$; б) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. **218.** $\left(5; \frac{25-\sqrt{145}}{2}\right)$. **219.** $(-\infty; -8) \cup (12; +\infty)$. **220.** $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **221.** а) $(11; 1)$; $(11; -1)$. **222.** а) $(3; 3)$; $(5; 1)$. **223.** $\left(-5\frac{40}{49}; -3\frac{24}{49}\right)$; $(5; 3)$. **224.** $(-2; 1)$; $(2; -1)$. **225.** $(5; 5)$. **229.** $\left(3; \frac{1}{9}\right)$. **231.** а) $\left(1; \frac{1}{4}\right]$; б) $\left(\arccos\frac{27}{28} + 2\pi n; \pi + \arcsin\frac{17}{28} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; $\left(-\arccos\frac{27}{28} + 2\pi m; -\arcsin\frac{17}{28} + 2\pi m\right)$, $m \in Z$. **232.** $(\pm\arccos(1-\sqrt{3}) + 2\pi n;$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\Big)$, $n \in Z$, $m \in Z$. **233.** $(1; 5)$; $\left(\frac{5}{2}; 2\right)$. **234.** $(2; 1)$. **236.** а) 0; б) 0. **237.** а) $\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$; $\left(\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $n \in Z$, $k \in Z$. **238.** При $c = -1$. **240.** а) $a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **241.** При $b < -2$ нет корней; при $b = -2$ один корень; при $b > -2$ два корня. **242.** б) Нет корней при $a < 5$; $x \in [-3; 2]$ при $a = 5$; $x = \frac{-a-1}{2}$ и $x = \frac{a-1}{2}$ при $a > 5$. **246.** $\left(0; \frac{1}{12}\right]$. **247.** Нет корней при $a > 4$; $x = -2$ при $a = 4$; $x \in \left[-\frac{a+2}{3}; 2 - a\right]$ при $a < 4$. **248.** $x > 2a^2 + \frac{a}{2}$ при $a < 0$; $x > \frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}$ при $a \geqslant 0$. **249.** Нет корней при $a \neq 0$; πn, $n \in Z$; $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$ при $a = 0$. **250.** При $a = 3$, $a \in [\sqrt{10}; \sqrt{11})$. **251.** $(-\infty; -4] \cup$ $\cup \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right\} \cup [4; +\infty)$. **252.** При $a = -\frac{7}{4}$, $a = \frac{1}{3}$. **253.** $a \in [3; +\infty)$. **254.** $a = -\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\pm\sqrt{3}$, ± 1. **255.** а) 0; б) 0. **256.** По 8 л. **257.** По 8 л. **258.** По $\frac{mn}{m+n}$ л. **259.** По 99 л. **260.** $\frac{mn}{m+n}$ л; а) 12 л; б) 7,5 л. **261.** а) $\frac{2}{3}$ л; б) $\frac{1}{2}$ л. **262.** а) 75 км/ч; б) 40 км/ч. **263.** а) 6 км/ч; б) 72 км/ч. **264.** а) 12 км/ч. **266.** а) 7 : 5; б) 7 : 3. **267.** а) 15 мин; б) 3 круга. **268.** а) 6 км/ч; б) 15 км/ч.

Оглавление

ГЛАВА I. ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ. ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Функции и их графики 3
1.1. Элементарные функции 3
1.2. Область определения и область изменения функции. Ограниченность функции 5
1.3. Четность, нечетность, периодичность функций 8
1.4. Промежутки возрастания, убывания, знакопостоянства и нули функции 14
1.5. Исследование функций и построение их графиков элементарными методами 18
1.6. Основные способы преобразования графиков 21
1.7*. Графики функций, содержащих модули 34
1.8*. Графики сложных функций 39

§ 2. Предел функции и непрерывность 45
2.1. Понятие предела функции 45
2.2. Односторонние пределы 49
2.3. Свойства пределов функций 56
2.4. Понятие непрерывности функции 60
2.5. Непрерывность элементарных функций 65
2.6*. Разрывные функции 67

§ 3. Обратные функции 72
3.1. Понятие обратной функции 72
3.2*. Взаимно обратные функции 75
3.3*. Обратные тригонометрические функции 80
3.4*. Примеры использования обратных тригонометрических функций 85

§ 4. Производная 89
4.1. Понятие производной 89
4.2. Производная суммы. Производная разности 96
4.3*. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал 99
4.4. Производная произведения. Производная частного 101
4.5. Производные элементарных функций 103
4.6. Производная сложной функции 108
4.7*. Производная обратной функции 111

§ 5. Применение производной 114
5.1. Максимум и минимум функции 114
5.2. Уравнение касательной 121
5.3. Приближенные вычисления 125
5.4*. Теоремы о среднем 127
5.5. Возрастание и убывание функции 129
5.6. Производные высших порядков 134

5.7*. Выпуклость графика функции 137
5.8*. Экстремум функции с единственной критической точкой . 141
5.9. Задачи на максимум и минимум 145
5.10*. Асимптоты. Дробно-линейная функция 149
5.11. Построение графиков функций с применением производных 156
5.12*. Формула и ряд Тейлора 162

§ 6. Первообразная и интеграл 167
6.1. Понятие первообразной 167
6.2*. Замена переменной. Интегрирование по частям 173
6.3. Площадь криволинейной трапеции 175
6.4. Определенный интеграл 178
6.5*. Приближенное вычисление определенного интеграла . . . 181
6.6. Формула Ньютона — Лейбница 185
6.7. Свойства определенного интеграла 191
6.8*. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах 196
6.9*. Понятие дифференциального уравнения 202
6.10*. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . 206

Исторические сведения 212

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ

§ 7. Равносильность уравнений и неравенств 214
7.1. Равносильные преобразования уравнений 214
7.2. Равносильные преобразования неравенств 219

§ 8. Уравнения-следствия 225
8.1. Понятие уравнения-следствия 225
8.2. Возведение уравнения в четную степень 229
8.3. Потенцирование логарифмических уравнений 231
8.4. Другие преобразования, приводящие к уравнению-следствию 233
8.5. Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению-следствию. 237

§ 9. Равносильность уравнений и неравенств системам 240
9.1. Основные понятия 240
9.2. Решение уравнений с помощью систем 243
9.3. Решение уравнений с помощью систем (продолжение) . . 247
9.4*. Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ 253
9.5. Решение неравенств с помощью систем 256
9.6. Решение неравенств с помощью систем (продолжение) . . 260
9.7*. Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ 263

§ 10. Равносильность уравнений на множествах 266
10.1. Основные понятия 266
10.2. Возведение уравнения в четную степень 268
10.3*. Умножение уравнения на функцию 270
10.4*. Другие преобразования уравнений 273
10.5*. Применение нескольких преобразований 277
10.6*. Уравнения с дополнительными условиями 281

§ 11. Равносильность неравенств на множествах 283
11.1. Основные понятия 283
11.2. Возведение неравенства в четную степень 285
11.3*. Умножение неравенства на функцию 288
11.4*. Другие преобразования неравенств 290
11.5*. Применение нескольких преобразований 294
11.6*. Неравенства с дополнительными условиями 298
11.7*. Нестрогие неравенства 301

§ 12. Метод промежутков для уравнений и неравенств 303
12.1. Уравнения с модулями 303
12.2. Неравенства с модулями 307
12.3. Метод интервалов для непрерывных функций 311

§ 13*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств 314
13.1*. Использование областей существования функций 314
13.2*. Использование неотрицательности функций 317
13.3*. Использование ограниченности функций 319
13.4*. Использование монотонности и экстремумов функций . . 325
13.5*. Использование свойств синуса и косинуса 328

§ 14. Системы уравнений с несколькими неизвестными 331
14.1. Равносильность систем 331
14.2. Система-следствие 337
14.3. Метод замены неизвестных 344
14.4*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений 348

§ 15*. Уравнения, неравенства и системы с параметрами 355
15.1*. Уравнения с параметром 355
15.2*. Неравенства с параметром 360
15.3*. Системы уравнений с параметром 363
15.4*. Задачи с условиями 367

Исторические сведения 374

ГЛАВА III. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 16*. Алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел 379
16.1*. Алгебраическая форма комплексного числа 379
16.2*. Сопряженные комплексные числа 384
16.3*. Геометрическая интерпретация комплексного числа . . . 386

§ 17*. Тригонометрическая форма комплексных чисел 390
17.1*. Тригонометрическая форма комплексного числа 390
17.2*. Корни из комплексных чисел и их свойства 396

§ 18*. Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел 401
18.1*. Корни многочленов 401
18.2*. Показательная форма комплексного числа 405

Исторические сведения 408

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ 410

Приложения 437
1. Таблица производных 437
2. Таблица интегралов 438
3. Свойства логарифмов 438
4. Основные формулы тригонометрии 439
5. Простейшие тригонометрические уравнения 439

Предметный указатель 440

Ответы 443

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художники *П. С. Барбаринский, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской, И. В. Губиной, К. В. Солоненко, О. Ю. Тупикиной*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *Л. С. Александрова, А. К. Райхчин*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 21.05.09. Формат $70 \times 90\,{}^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 36,39 + 0,55 форз. Тираж 30 000 экз. Заказ № 22950 (ц-гэ).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Производная

$C' = 0$ $\qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \boldsymbol{R},\ \alpha \neq 0$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

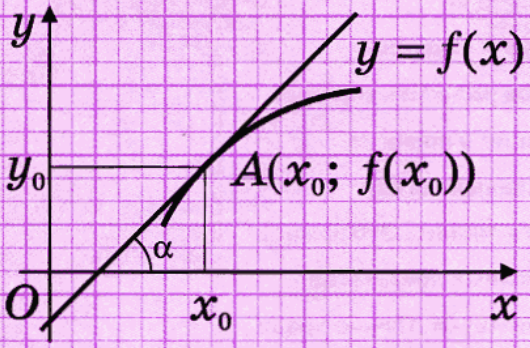
$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad (Cu)' = Cu'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$ $\qquad u'_x = \dfrac{1}{x'_u}$

Уравнение касательной



$$y_0 = f(x_0)$$

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Формула и ряд Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < c < x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Первообразная и интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\quad F'(x) = f(x)$$

$$\int A\,dx = Ax + C,\quad A \in \boldsymbol{R}$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \in \boldsymbol{R},\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\quad a > 0,\quad a \neq 1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C$$

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

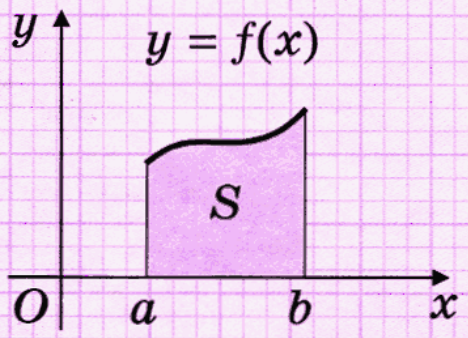
$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad (F'(x) = f(x))$$

Площадь криволинейной трапеции



$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \quad f(x) \geqslant 0$$